

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/282359011>

Kleines Einmaleins der Baustatik – Wissenswertes für Neu- und Wiederlerner

Book · June 2007

CITATIONS

0

READS

4,630

2 authors, including:



[Wolfram Franke](#)

Yara International ASA

53 PUBLICATIONS 89 CITATIONS

SEE PROFILE

Wolfram Franke, Thorsten Kunow

Kleines Einmaleins der Baustatik

Wissenswertes für
Neu- und Wiederlerner

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen
Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über
<http://dnb.ddb.de> abrufbar

ISBN 978-3-89958-306-9
URN: urn:nbn:de:0002-3065

© 2007, kassel university press GmbH, Kassel
www.upress.uni-kassel.de

Bei der Erstellung des Layouts wurde das Programm MiKTeX verwendet.
Druck und Verarbeitung: Unidruckerei der Universität Kassel
Printed in Germany

Für meine Großväter
Für Linus, Lina und Wiebke

Vorwort

Sehr geehrte Leserin, sehr geehrter Leser,

mit diesem Buch wollen wir Ihnen einen Einblick in das Wesen der Baustatik geben. Sie sollen die Grundlagen der gängigen Berechnungsverfahren vorgestellt bekommen und die mathematischen Hintergründe und Modelle kennen lernen. Um das Buch nicht zu dick werden zu lassen, haben wir uns damit begnügt, im Wesentlichen nur das kleine Einmaleins der Baustatik zu behandeln: Die Stabstatik.

Ein wesentliches Ziel dieses Buches ist es, Ihnen verständlich zu machen, dass die in der Baustatik verwendeten Modelle im Kern sehr ähnlich sind, gleichwohl sie so unterschiedlich erscheinen. Wir bewegen uns mit den Inhalten dieses Buches im Wesentlichen im Bereich der Stabtragwerke. Und trotz dieser Beschränkung besteht dort schon eine Fülle von Modellierungsvarianten. Zwei grundlegende mathematische Betrachtungsweisen (Kraft- oder Weggrößenverfahren), diverse elementare Strukturen (Stab, Biegebalken, Schubträger, gebetteter Balken, Seil) und verschiedene Verformungsverhalten (Theorie erster oder höherer Ordnung) stehen zur Diskussion. Eine noch größere Vielfalt *droht* gar bei den Flächentragwerken, deren Betrachtung wir der Übersichtlichkeit wegen ausgelassen haben, gerne aber auf die entsprechende Literatur hinweisen (z.B. [16] und [20]).

Wilhelm Genaziano schreibt in einem seiner Romane: *Ich habe ein Interesse an verschiedenen Wahrheitsversionen, weil ich es schätze, vor mir selbst ein wenig verwirrt zu sein.* Auch in der Baustatik gibt es mehrere Wahrheitsversionen. Aber lassen Sie sich davon bitte nicht verwirren. Jedes Modell kann in sich stimmen, und trotzdem liefern die Modelle nicht zwingend gleiche Ergebnisse. Doch nur diese Vielfalt gibt den Planenden die Möglichkeit, ein für das betrachtete Objekt und die verfolgte Zielsetzung das bestmögliche Modell zu entwerfen. Nutzen Sie die Vielfalt an Möglichkeiten der Modellierung auszuschöpfen.

VIII Vorwort

Wir wünschen viel Spaß und noch mehr Erkenntnis beim Lesen dieses Buches.

Kassel,
April 2007

Wolfram Franke
Thorsten Kunow

Danksagung. Ein herzliches Dankeschön geht an Prof. Dr.-Ing. Friedel Hartmann, Dr.-Ing. Dr. rer. nat. Peter Jahn und Dr. rer. nat. Liselotte Franke für die Unterstützung bei der Erarbeitung dieses Buches.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundwissen	1
1.1	Statik sehen	1
1.1.1	Sichtbare Tragwerke	1
1.1.2	Statik an der Pinwand	3
1.1.3	Spannung und Optik	4
1.2	Was sind Schnittgrößen?	5
1.2.1	Vorzeichendefinition	5
1.2.2	Herleitung	6
1.2.3	Anwendung	9
1.2.4	Momentenflächen	10
1.2.5	Explosionszeichnungen	11
1.3	Lager und Gelenke	14
1.3.1	Lagerungsarten	14
1.3.2	Gelenke in statischen Systemen	15
1.4	Lastannahmen	16
1.4.1	Was ist die DIN 1055?	16
1.4.2	Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln	17
1.4.3	Teil 1: Wichten und Flächenlasten von Baustoffen, Bauteilen und Lagerstoffen	20
1.4.4	Teil 3: Eigen- und Nutzlasten für Hochbauten	20
1.4.5	Teil 4: Windlasten	21
1.4.6	Teil 5: Schnee- und Eislasten	22
1.4.7	Beispiel	23
1.5	Addition von Lastfällen	25
1.5.1	Lagerreaktionen und Schnittgrößen	25
1.5.2	Durchlaufträger	26
1.6	Fragerunde	28
2	Kraftgrößenverfahren	29
2.1	Einführung	29
2.1.1	Umwege zum Ziel	29
2.1.2	Statische Unbestimmtheit	29

2.1.3	Statisch bestimmt – statisch unbestimmt	32
2.1.4	Statisch bestimmtes Hauptsystem und Arbeitsgleichung	34
2.1.5	Die vollständige Arbeitsgleichung	36
2.1.6	Federn	38
2.1.7	Zusammenfassung	40
2.2	Veränderliche Streckenlast	40
2.2.1	Wenn Einzellasten nicht ausreichen.	40
2.2.2	Grundlagen	40
2.2.3	Anwendung	41
2.3	Lastfall Temperatur	42
2.4	Verformungen	44
2.4.1	Arten der Verformung	44
2.4.2	Einzelpunktverschiebungen	44
2.4.3	Das ω -Verfahren	46
2.4.4	Eingeprägte Verschiebungen	47
2.5	Orthogonalität von Spannungszuständen	49
2.5.1	Herleitung	49
2.5.2	Beispiel	51
2.5.3	Reduktionssatz	52
2.6	Raumtragwerke	53
2.6.1	Projektion	53
2.6.2	Vorzeichendefinition	53
2.6.3	Lösungsstrategie	54
2.6.4	Lagerreaktionen	54
2.6.5	Schnittgrößen	56
2.7	Zum Merken	56
2.8	Fragerunde	58
3	Weggrößenverfahren	59
3.1	Matrizenverschiebungsmethode	59
3.1.1	Eine Welt aus Federn	59
3.1.2	Eigenschaften einer Steifigkeitsmatrix	61
3.1.3	Zusammenfügen von mehreren Tragwerkselementen	63
3.1.4	Kräfte und Verformungen	65
3.2	Belastung am Knoten und im Feld	65
3.2.1	Einführung	65
3.2.2	Aufteilung in f- und p-Vektoren	65
3.2.3	Eingeprägte Lagerverschiebungen	68
3.2.4	Lastfall Temperatur	70
3.3	Wichtige Matrizen	70
3.3.1	Transformationsmatrix	70
3.3.2	Steifigkeitsmatrix für den Zug-Druckstab	71
3.3.3	Steifigkeitsmatrix für den gedrehten Zug-Druckstab	71
3.3.4	Steifigkeitsmatrix für den Biegebalken (Bernoulli)	71
3.3.5	Steifigkeitsmatrix für vollständiges Balkenelement	71
3.3.6	Theorie 2. Ordnung – Geometrische Steifigkeitsmatrix	72
3.3.7	Steifigkeitsmatrix für das vollständige, gedrehte Balkenelement	72
3.4	Nachlaufrechnung	74

3.4.1	Zwischen den Tragwerksknoten	74
3.4.2	Ablauf der Berechnung	74
3.4.3	Beispiel	75
3.4.4	Berechnungen mit Ablaufschema	76
3.5	Einheitsverformungen	77
3.5.1	Einführung	77
3.5.2	Grundlegende Polynome	79
3.5.3	Für Einheitsverformungen benötigte Kräfte	81
3.6	Substrukturtechnik	82
3.6.1	Hintergrund	82
3.6.2	Näherungslösungen	83
3.7	Einführung in das Drehwinkelverfahren	85
3.7.1	Grundlagen	85
3.7.2	Vorgehensweise	86
3.7.3	Nichtlinearität beim DWV	89
3.8	Zum Merken	89
3.9	Fragerunde	90
4	Aufbauwissen	91
4.1	...so geht es weiter	91
4.2	Symmetrie und Antimetrie	91
4.2.1	Sinn dieser Übung	91
4.2.2	Modellbildung	92
4.3	Rahmen	94
4.3.1	Allgemeines	94
4.3.2	Lagerreaktionen	94
4.3.3	Hilfssysteme bei Rahmen	96
4.4	Passprobleme	96
4.5	Jenseits von Bernoulli	98
4.5.1	Langerscher Balken	98
4.5.2	Vierendeelträger	99
4.5.3	Gebetteter Balken	100
4.5.4	Schubträger	102
4.5.5	Seil	103
4.6	Nichtlineares Verhalten bei Stabtragwerken	105
4.6.1	Bananas and Nonbananas	105
4.6.2	Schnittgrößenermittlung am verformten System	106
4.6.3	Fließgelenkbildung und Traglastverfahren	107
4.6.4	Stabilitätsprobleme	112
4.7	Fragerunde	121
5	Moderne Statik	123
5.1	Energie und Arbeit	123
5.1.1	Viel Arbeit und Energie satt Schnittprinzip	123
5.1.2	Energieerhaltung	123
5.1.3	Potentielle Energie	124
5.1.4	Arbeit	125
5.1.5	Prinzip der virtuellen Verrückungen	125
5.1.6	Prinzip der virtuellen Kräfte	126

5.1.7	Minimum der potentiellen Energie	127
5.1.8	Satz von Betti	128
5.2	Einflusslinien	129
5.2.1	Bedeutung	129
5.2.2	Beispiele	129
5.2.3	Greensche Funktionen	135
5.2.4	Das Schema F	138
5.2.5	Auswertung von Einflusslinien	139
5.3	Polplankonstruktion	140
5.3.1	Drehscheibenstatik	140
5.3.2	Regeln der Polplankonstruktion	141
5.3.3	Kinematik der Verschiebungsfiguren	141
5.3.4	Reihenfolge der Haupt- und Nebentpole	144
5.4	Betti, Green und Mohr	146
5.4.1	Mathematische Ideen mit Tragweite	146
5.4.2	Herleitung der Greenschen Identitäten für den Stab	146
5.4.3	Herleitung der Greenschen Identitäten für den Balken	147
5.4.4	Anwendung der Greenschen Identitäten	148
5.4.5	Mohrsche Analogie	151
5.5	Einführung in die Methode der finiten Elemente	151
5.5.1	Alles bewegt sich und keiner wird nass	151
5.5.2	Eine einfache Herleitung	152
5.5.3	Die moderne Schreibweise	154
5.5.4	Fehlerberechnung in der FEM	155
5.6	Einführung in das Thema Randelemente	158
5.6.1	Mehr als Stab und Balken	158
5.6.2	Die Idee	159
5.6.3	Herleitung für den Stab	161
5.6.4	Operatoren	165
5.6.5	Anwendung	166
5.7	Fragerunde	168
6	EDV-Einsatz	169
6.1	Rechnen und rechnen lassen	169
6.2	Programme	170
6.2.1	RSTAB und RFEM	170
6.2.2	TwoDFrame	171
6.2.3	Nastran	173
	Abbildungsverzeichnis	176
	Literaturverzeichnis	185
	Sachverzeichnis	187

Grundwissen

1.1 Statik sehen

1.1.1 Sichtbare Tragwerke

Baustatik ist etwas sehr anschauliches. Bei einigen Bauwerken kann man das Tragwerk als solches erkennen, bei anderen ist es versteckt. Aber warum sollte man das, was ein Bauwerk aufrecht erhält, verstecken? Schauen wir uns einfach ein paar Beispiele an, und Sie werden erkennen: Statik und Ästhetik können Hand in Hand gehen.

Fangen wir mit einer alten Scheune an. In Abbildung 1.1 ist gut das Fach- und Ständerwerk aus Stäben und Balken aus Holz zu erkennen. Man kann dem Bauwerk ansehen, wie die Lasten abgetragen werden. Die Holzbeplankungen und Ausfachungen aus Mauerwerk dienen nicht dem Lastabtrag.



Abb. 1.1. Dachkonstruktion einer alten Scheune ausgebildet als Fach- und Ständerwerk.

Moderne Holzbauwerke, wie das Expo-Dach auf dem Messegelände Hannover, scheinen die Lasten nicht nur über längliche sondern auch flächige Bauwerksteile

abzutragen (Abbildung 1.2). Schaut man genauer hin, so ist zu erkennen, dass auch die flächenhaften Elemente aus Fachwerken bestehen (Abbildung 1.2). Die Form des Daches allein ist schon interessant. Sie entstammt einem Membrantragwerk (Zugbeanspruchung ohne Biegung), welches nach der Formfindung einmal gewendet wurde und so zu einem auf Druck und Biegung beanspruchten Schalentragwerk wird. Diese Dachkonstruktion aus Holz ist weltweit einzigartig.



Abb. 1.2. Expo-Dach auf dem Messegelände Hannover.

Wechseln wir den Werkstoff. Auch Stahlkonstruktionen sind mitunter leicht zu durchschauen. Beispielsweise das in Abbildung 1.3 gezeigte Congress-Centrum Hannover. Deutlich sind auch hier die Stäbe als wichtiger Bestandteil des Tragwerks zu erkennen, wie Abbildung 1.3 zeigt. Der runde Oberbau ist auf einen Stahlrost gelagert, welcher von einer Stahlstützenkonstruktion getragen wird. Die Stahlquerschnitte werden an wenigen Punkten zusammengeführt und sind auf Stahlbetonsäulen gelagert, welche die Vertikallasten in das Erdreich abtragen.



Abb. 1.3. Mehretages Congress-Centrum auf der Hannovermesse. Stahl- und Betonkonstruktion.

Der Paradefall für sichtbare Tragwerke sind Brücken. In Abbildung 1.4 ist die Schrägseilbrücke über die Daugawa (Vanšu tilts) in Riga/ Lettland zu sehen. Sowohl die schräg gespannten Stahlseile, an denen das Brückendeck aufgehängt ist, als auch der kräftige Pylon aus Stahlbeton sind gut zu erkennen. Die Seile sind Tragwerkelemente, die nur auf Zug beansprucht werden können. Der Pylon ist hauptsächlich auf Druck beansprucht, trägt aber auch die Horizontallasten auf Biegung ab.



Abb. 1.4. Schrägseilbrücke *Vanšu tilts* über die Daugawa in Riga/ Lettland.

Geht es um flächige Tragwerksstrukturen, also Platten, Scheiben und Schalen, wird als Werkstoff häufig Stahlbeton gewählt, kann er doch in fast jede Form gebracht werden. Bei dem in Abbildung 1.5 dargestellten phäno in Wolfsburg wurde an gewölbten Flächen nicht gespart. Insgesamt zehn kegelförmige Pfeiler tragen das erste Geschoss des Bauwerks, fünf davon reichen darüber hinaus und tragen die Dachkonstruktion.



Abb. 1.5. Außenansicht des phäno in Wolfsburg mit seinen geschwungenen Tragpfeilern.

1.1.2 Statik an der Pinwand

Ist Rechnen der beste Zugang zu Statik? Oder kann man die einfachen Prinzipien nicht auch optisch erkennen? Probieren wir es aus. Auf den folgenden vier Fotos, siehe Abbildung 1.6, ist eine Pinwand abgebildet. Auf den Fotos sieht man ein Seil,

welches am linken (0 cm) und rechten Lager (20 cm) mit Gummibändern befestigt ist. Und dann sind noch zwei weitere Lager zu finden, bei 5 cm und bei 15 cm.

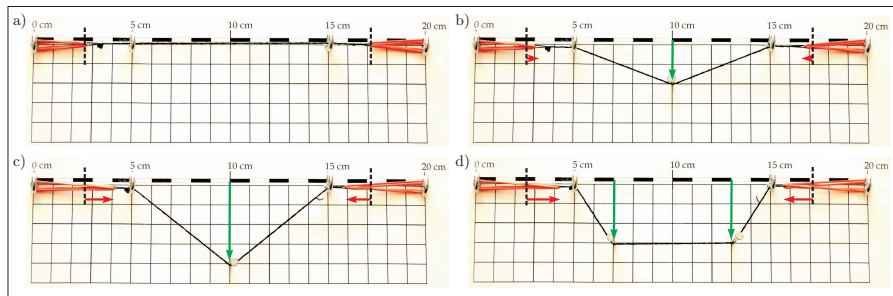


Abb. 1.6. a) Seil vorgespannt, aber unbelastet, b) und c) Seil mit einer Einzellast in Systemmitte und d) Seil mit zwei Einzellasten.

Wird das Seil in der Mitte um etwa 2 cm nach unten ausgelenkt, so muss dafür eine Kraft aufgebracht werden. Diese vertikale Kraft wird über den Lagern bei 5 cm und 15 cm umgelenkt und führt zu horizontalen Kräften, die ihrerseits die Gummibänder etwas spannen. Lenkt man das Seil noch weiter aus, so werden die Gummibänder noch stärker gespannt - sie werden noch länger. Wird das Seil nun an zwei Stellen ausgelenkt, so stellt sich zwischen den Punkten der Auslenkung eine Gerade ein, und auch die Gummibänder sind natürlich wieder gespannt.

Wozu diese Versuche. Nun, in der Statik gibt es zwei Größen, die miteinander in Verbindung stehen: Kraft und Verformung. Verformungen an einem Tragwerk führen zu Kräften, und umgekehrt haben Kräfte Verformungen zur Folge. Soll ein Bauteil Kräfte übertragen, so muss es sich verformen, damit die inneren Kräfte aktiviert werden - so zu sehen an den Gummibändern. Und Kräfte kann man auch umlenken, aber das ist schon etwas komplizierter.

1.1.3 Spannung und Optik

Ein weiteres Experiment, mit dessen Hilfe Kräfte visualisiert werden können, kommt aus dem Bereich der Spannungsoptik. Die beiden Fotos, siehe Abbildung 1.7, zeigen die Auswirkungen von Belastungen auf Tragstrukturen. Ausgenutzt wird hierbei, dass sich die Moleküllagen im Material verschieben und so der Lichtdurchfluss manipuliert wird. Je dunkler ein Bereich im Tragelement, desto stärker die Belastung. Derartige Versuche lassen sich in manchem technischen Museum ansehen oder auch mit den Materialien aus der Materialsammlung der Experimentalphysik selbst aufbauen. Die Fotos sind im *phæno* in Wolfsburg entstanden. Dort finden sich übrigens noch weitere Experimente zu Statik und Mechanik.

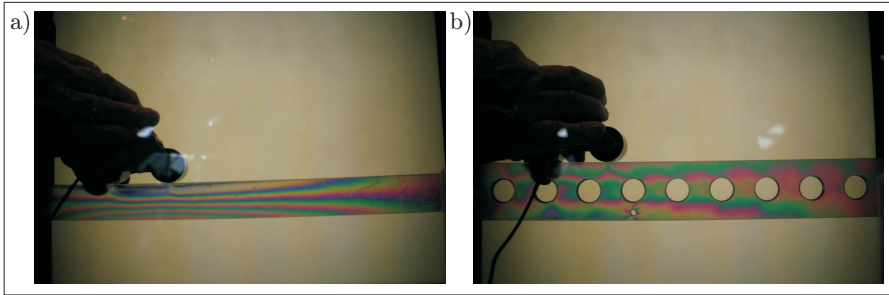


Abb. 1.7. a) Sichtbare Spannung an einem Balken infolge einer Einzellast, b) Spannung an einem Balken mit Löchern infolge einer Einzellast.

1.2 Was sind Schnittgrößen?

1.2.1 Vorzeichendefinition

Eine strukturmechanische Berechnung setzt die einwandfreie Orientierung im System voraus. Deshalb muss ein Koordinatensystem festgelegt werden, an dem sich die beobachteten Größen orientieren. In der Technischen Mechanik und Statik werden klassischerweise kartesische Koordinatensysteme verwendet, wie in Abbildung 1.8 gezeigt. Das eingezeichnete Koordinatensystem stellt das Koordinatensystem des positiven Schnittufers dar.

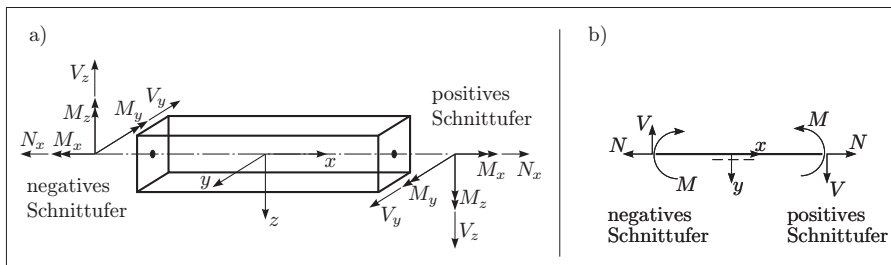


Abb. 1.8. a) Schnittgrößen im allgemeinen Fall und b) am ebenen Balken.

Und was ist nun ein Schnittufer? Schauen wir uns einen Balkenabschnitt eines beliebigen Tragwerks in Abbildung 1.9 an. Wird der Balken durchgeschnitten, entstehen zwei Schnittufer. Am positiven Schnittufer haben die positiv definierten Richtungen der Schnittgrößen die gleiche Richtung wie die Koordinatenachsen. Die positiv definierten Richtungen der Schnittgrößen am negativen Schnittufer verlaufen entgegengesetzt zu den Koordinatenachsen. Die Richtungen der frei geschnittenen Kraftgrößen sind stets entgegengesetzt gerichtet gleich groß.

Schnittgrößen sind diejenigen Kräfte und Momente, die beim Durchtrennen eines Systems freigeschnitten werden. Sie lauten

- N = Normalkraft
- V = Querkraft
- M = Moment.

und sind in Abbildung 1.9 c dargestellt.

Die als positiv definierten Richtungen der Schnittgrößen haben nichts mit dem Lastabtrag zu tun, also den Richtungen der wirkenden Kraftgrößen. Die Werte und vor allem die Vorzeichen der wirkenden Schnittgrößen ergeben sich im Verlauf der Berechnung. Wirken die Kräfte in den gleichen Richtungen wie die Koordinatenrichtungen, so werden die Kräfte positiv bewertet, anderenfalls negativ.

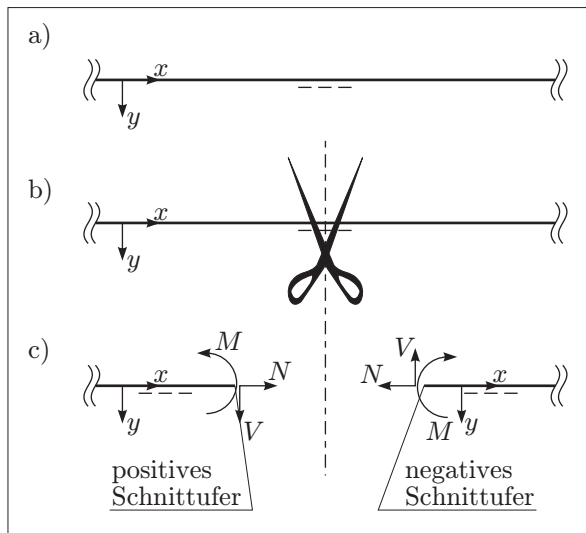


Abb. 1.9. Schnittuferdefinition. a) Balkenabschnitt, b) Schnitt und c) zwei Schnittufer.

1.2.2 Herleitung

Die Zusammenhänge der Schnittgrößen sollen anhand eines vollständigen Balkenelementes, dargestellt in Abbildung 1.10, erklärt werden. Auf den Balken wirken veränderliche Querlasten q_z und Normallasten q_x . Daher ist bei der Entwicklung einer Differentialgleichung für den Balken neben der Biegung auch die Verformung aus Normalkraft zu berücksichtigen.

Die Gleichgewichtsbetrachtungen des differentiellen Balkenelementes liefern die folgenden Zusammenhänge. Für das vertikale Kräftegleichgewicht gilt (siehe Abbildung 1.10)

$$\begin{aligned} \downarrow \sum F_z = 0 : & -V + q_z dx + V + dV = 0 \\ \Rightarrow & -\frac{dV}{dx} = -V'(x) = q_z(x). \end{aligned}$$

Das Momentengleichgewicht liefert zunächst folgende Gleichung.

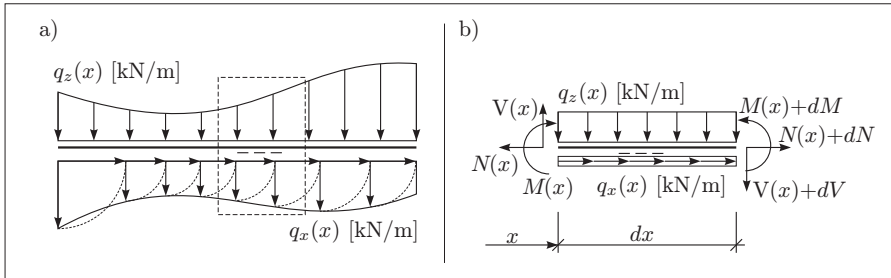


Abb. 1.10. a) Balken mit Normal- und Querlast, b) Schnittgrößen am differentiellen Balkenelement.

$$\sum M_y = 0 : \quad M + q_x dx \frac{dx}{2} - M - dM + V dx = 0$$

Dividiert man diese Gleichung durch die Länge des differentiellen Balkenelementes dx , so erhält man

$$\frac{q_x}{2} dx - \frac{dM}{dx} + V = 0.$$

Lässt man dx nun gegen Null gehen, so kann der erste Term weggelassen werden und es ergibt sich die differentielle Beziehung

$$\frac{dM}{dx} = M'(x) = V(x).$$

Das horizontale Gleichgewicht liefert die differentielle Beziehung der Belastung und Schnittkraft. Es gilt entsprechend

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_x = 0 : \quad -N + q_x dx + N + dN &= 0 \\ \Rightarrow -\frac{dN}{dx} &= -N'(x) = q_x(x). \end{aligned}$$

Damit sind die Beziehungen von Schnittgrößen und äußeren Lasten hergestellt. Die verteilten Lasten werden auf dem Element dx als konstant angesehen, da auf dieser kurzen Distanz die Lastunterschiede an den Schnittpunkten gegen Null gehen.

Weiter muss bei der Herleitung das Materialgesetz

$$\begin{aligned} \sigma &= \text{Spannung in Kraft/Fläche} \\ \sigma &= E \varepsilon, \quad E = \text{Elastizitätsmodul in Kraft/Fläche} \\ \varepsilon &= \text{Dehnung (dimensionslos)} \quad [-] \end{aligned}$$

berücksichtigt werden, womit eine Beziehung der Schnittkräfte mit den Deformationen (Dehnung bzw. Krümmung) unter Berücksichtigung der Materialeigenschaften hergestellt wird. Aus ihm wird für die Normalkraftverformung die Gleichung für die Normalkraft N

$$N = EA\varepsilon$$

bzw. für die Verformungsanteile aus Biegung mit der Krümmung κ die Gleichung für das Biegemoment M

$$M_y = -EI_y \kappa$$

hergeleitet.

Als letztes fehlt die Verknüpfung der Verformung, also $u(x)$ bzw. $w(x)$, mit den Deformationen. Dafür wird die Verformung an einem differentiellen Stab bzw. Balkenelement betrachtet.

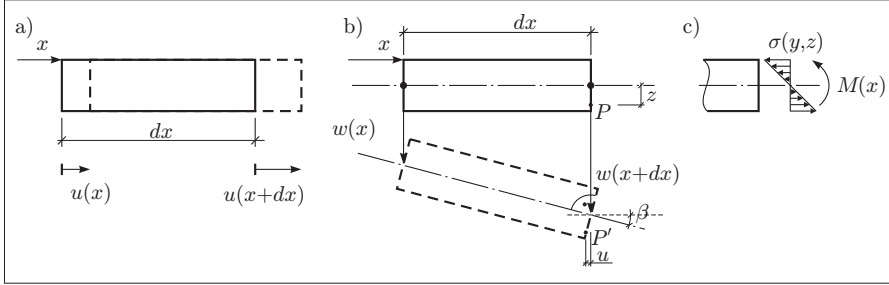


Abb. 1.11. a) Dehnstab, b) Bernoulli-Balken und c) Spannungsverteilung an der Stelle x .

Aus Abbildung 1.11 a kann die Beziehung der Dehnungen

$$\varepsilon = \frac{u(x+dx) - u(x)}{dx} = \frac{u(x) + u'(x)dx - u(x)}{dx} = \frac{u'(x)dx}{dx} = \frac{du(x)}{dx}$$

hergeleitet werden, d.h. die Dehnungen sind die erste Ableitung der Verschiebungsfunktion $u(x)$.

Beim Bernoulli-Balken wird vom Ebenbleiben des Querschnitts ausgegangen, d.h. der Querschnitt bleibt senkrecht zur lokalen Systemachse, die sich global aber verschiebt und verdreht. Der Querschnitt erfährt eine Verdrehung um den Winkel β . In Abbildung 1.11 b ist der Verdrehungswinkel β eingezeichnet. Unter der Annahme kleiner Verdrehungen ($|\beta| \ll 1$) lässt sich der Winkel über

$$\beta = \frac{w(x+dx) - w(x)}{dx} = \frac{dw(x)}{dx}$$

bestimmen. Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt P im Abstand z von der Mittellinie, so wird dieser Punkt in x -Achsenrichtung verschoben. Diese Verformung lässt sich wie folgt wieder über den Winkel β darstellen

$$u = -z \cdot \beta = -z \frac{dw(x)}{dx}.$$

Werden die Gleichungen für Dehnung und Winkel in die Gleichung für die Verschiebung eingesetzt, so erhält man

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{du}{dx} = -zE \frac{d^2w}{dx^2}.$$

Über die Integration der Spannungen über die Fläche A des Querschnitts und Multiplikation mit dem Hebelarm z erhält man das resultierende Moment

$$M_y = \int_A \sigma z dA = - \int_A E z^2 \frac{d^2 w}{dx^2} dA = -E \kappa \int_A z^2 dA.$$

Der Integralausdruck berechnet gerade das Flächenträgheitsmoment I_y . Wichtig ist hier die Erkenntnis, dass die Krümmung κ die zweite Ableitung der Biegelinie $w(x)$ ist, $\kappa = w''(x)$.

Durch Einsetzen der gewonnenen Gleichungen erhält man die Differentialgleichung für den Biegebalken

$$EI w^{IV}(x) = p(x)$$

und die Differentialgleichung für den Zug-Druckstab

$$-EA u''(x) = p_x(x).$$

1.2.3 Anwendung

Die Kenntnis über die differentiellen Zusammenhänge ermöglicht eine schnelle Bestimmung der Schnittgrößenverläufe. Auf diese Weise müssen nur wenige Stützpunkte eines Verlaufes über das Schnittprinzip berechnet werden. Der Verlauf zwischen diesen Punkten lässt sich über die Belastungsfunktion (Einzel- oder Streckenlast) und die Kenntnis der differentiellen Zusammenhänge zwischen Last und Moment/Querkraft ermitteln. Diese Zusammenhänge sind in Tabelle 1.1 aufgeführt.

Tabelle 1.1. Differentielle Zusammenhänge der Kraftgrößen bei einer vorgegebenen Belastung.

Kraftgröße	Operator	Verlauf					
Streckenlast q_z	$-dV/dx$	–	Einzellast	konst.	lin.	quad.	
Querkraft V	dM/dx	Null	konst.	lin.	quad.	kub.	
Moment M	$-EI w''$	konst.	lin.	quad.	kub.	4. Ordnung	

Wenn keine Streckenlast vorhanden ist, so können aber immer noch Einzellasten vorhanden sein. Diese führen zu unstetigen Verläufen und müssen über Randbedingungen eingebunden werden. Denn die Lösungsfunktion der Differentialgleichung ist im betrachteten Intervall stetig. Eine Einzellast P_z führt zu einem Sprung vom Betrag P_z im Querkraftverlauf und folglich zu einem Knick im Momentenverlauf. Beide Funktionen verlaufen dort also nicht stetig. Ein angreifendes Einzelmoment M hat natürlich einen Sprung im Momentenverlauf um den Betrag M zur Folge.

Wichtig ist auch zu wissen, dass Lasten überlagert werden können. Ist eine verteilte Last z.B. aus einem konstanten und einem quadratischen Anteil zusammengesetzt, so wird der Momentenverlauf durch Addition der quadratischen Parabel und der Parabel vierter Ordnung gebildet. Auf das Zerlegen einer Belastung in mehrere Lastfälle werden wir später noch z.B. in den Kapiteln 1.4.7 und 1.5 eingehen.

1.2.4 Momentenflächen

In der Statik werden vor allem die Momentenflächen betrachtet. Die Querkräfte werden gegebenenfalls ermittelt, um entsprechend der differentiellen Beziehungen der Schnittgrößen die Momente zu bestimmen.

Die Momentenflächen sollen zwei Aussagen liefern: Wie groß sind die Biegemomente an markanten Stellen des Tragwerks, und wie sehen die Verformungen aus.

Hierfür wird die so genannte Bezugsfaser eingeführt. Im Fall des ebenen Balkens liegt sie unten (positive z -Achsenrichtung). Wird sie durch die Schnittmomente gezogen, so erfährt das in Abbildung 1.12 a dargestellte Balkenelement eine Linkskrümmung, und das Biegemoment ist positiv. Wird die Bezugsfaser gedrückt, so entsteht eine Rechtskrümmung, und das Moment wird negativ bewertet. Die Zusammenhänge sind in Abbildung 1.12 dargestellt. Unabhängig vom Vorzeichen sind die Momentenflächen immer auf die gezogene Seite anzutragen, d.h. die Seite die durch das angreifende Moment gedehnt wird.

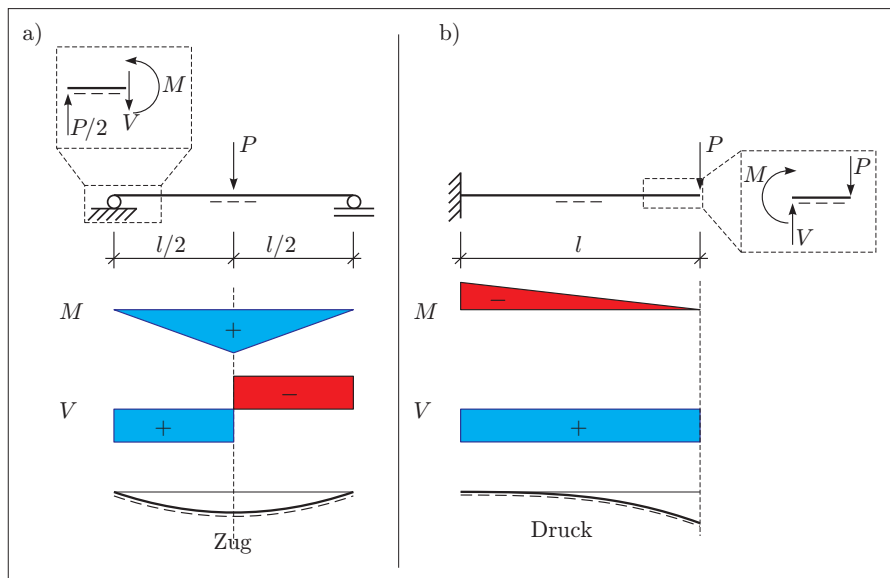


Abb. 1.12. a) Zusammenhang der Schnittgrößen am Einfeldträger und b) am Kragarm.

Mitunter kann auch eine Abschätzung der Biegelinie helfen, die Schnittkräfte abzuschätzen. In Abbildung 1.13 ist das Vorgehen für einen Durchlaufträger gezeigt:

1. Kinematik abschätzen: Element III nach unten, Element II wie Wippe, I nach oben
2. Biegelinie abschätzen: Krümmungen hinzufügen, Krümmungswechsel an Gelenken

3. Element III, Momentenverlauf unter Einzellast: Wie Balken auf zwei Stützen, also linear, und das Maximum liegt unter der Einzellast.
4. Querkraftverlauf entsprechend Balken auf zwei Stützen
5. Momentenverlauf wie beim Kragarm (Einspannung links) unter Streckenlast und Einzellast rechts. Die Momentenfläche liegt oben.
6. Momentenverlauf wie beim Kragarm (Einspannung rechts) unter Streckenlast. Die Momentenfläche liegt oben.
7. Der Querkraftverlauf startet nicht bei Null (rechts), sondern erhält den Wert vom Element III.
8. Das Element II arbeitet wie eine Wippe, die Vertikalkraft vom rechts angeschlossenen Element wird nach links an das Element I weitergereicht. Der Querkraftverlauf endet deshalb nicht bei Null, sondern erhält den negativen Wert vom rechts angeschlossenen Element (Symmetrie vorausgesetzt, sonst nicht gleichgroß!).
9. Das Element I wird mit einer von unten wirkenden inneren Kraft am rechten Ende belastet. Momentenfläche wie beim Kragarm.
10. Querkraftverlauf wie beim Kragarm.

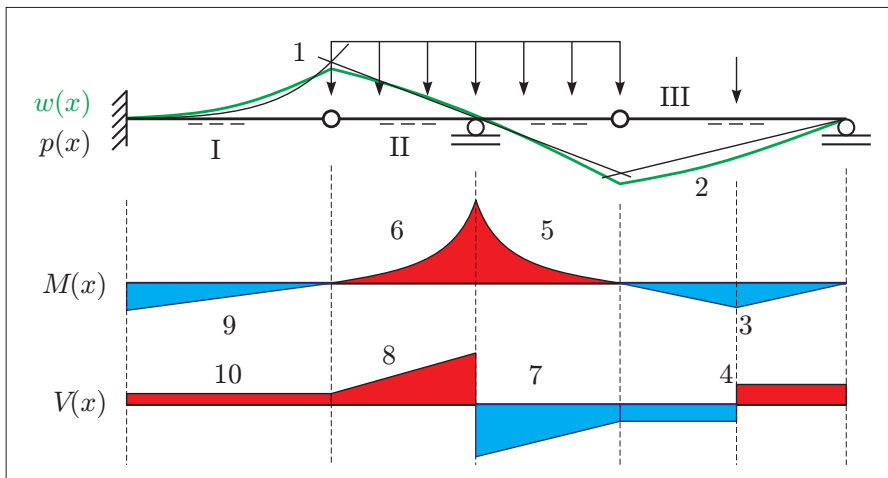


Abb. 1.13. Ableitung der Schnittgrößen aus der Biegelinie.

1.2.5 Explosionszeichnungen

Die Ermittlung der Schnittkraftverläufe und der Lagerreaktionen stellt oftmals ein großes Problem dar. Gerade bei komplexen oder *kniffligen* Systemen weiß man nicht, wo und wie man anfangen soll. Dabei gibt jedes System den Lösungsweg selbst vor. Um das Lesen eines Systems besser zu trainieren, wird in diesem Kapitel die Schnittgrößenermittlung mittels einer *Explosionszeichnung* erläutert. Dabei wird das Gesamtsystem in Teilsysteme unterteilt und jedes dieser Teilsysteme muss für sich

im Gleichgewicht stehen. Dieses Verfahren kann immer angewendet werden, gerade wenn man sich noch unsicher ist; man muss dafür allerdings ein wenig mehr Zeit investieren.

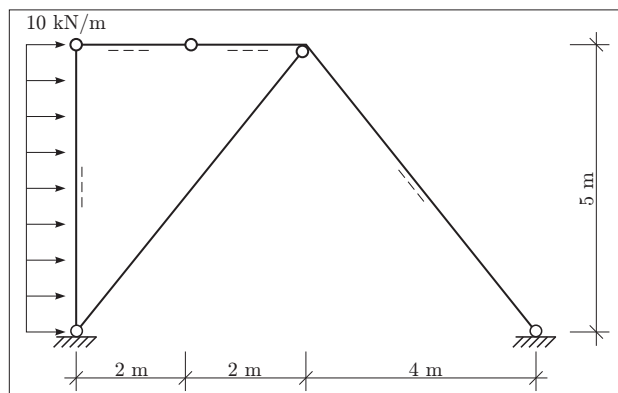


Abb. 1.14. Statisch bestimmtes System mit Gleichstreckenlast.

Anhand eines konkreten Beispiels soll die Methode *Explosionszeichnung* erläutert werden. Das statisch bestimmte System mit Geometrie und Belastung ist in Abbildung 1.14 dargestellt. Da sich die beiden Auflager auf gleicher Höhe befinden, können die vertikalen Lagerkräfte am Gesamtsystem über die Momentengleichgewichte am linken und rechten Lager ermittelt werden. Die Ermittlung der horizontalen Auflagerkräfte und der Momentenverlauf erschließen sich nicht sofort. Die Berechnung der horizontalen Lagerkräfte kann nur über Betrachtung von Teilsystemen, d.h. unter Ausnutzung der gegebenen Nebenbedingungen im System, erfolgen. Zunächst wird das allgemeine Vorgehen für eine Explosionszeichnung an dem vorliegenden System erklärt.

Das System in Abbildung 1.14 muss in Teilsysteme zerlegt werden. Die Schnitte sind dabei so zu wählen, dass die im System vorhandenen Nebenbedingungen ausgenutzt werden können, d.h. Schnitte werden an Gelenken (Momenten-, Normalkraft- und Querkraftgelenken) geführt. Die durch die Schnitte frei werdenden Schnittkräfte sind an jedem Teilsystem anzutragen, siehe Abbildung 1.15. An Auflagerpunkten, wo zwei und mehr Stäbe angeschlossen sind, muss der Knotenpunkt zusätzlich, wie in der Abbildung dargestellt, gezeichnet werden, damit eine einfache Berechnung der Schnittkräfte erfolgen kann. Gleiches gilt auch für eine Einzellast, die an einem Schnittpunkt im System angreift. Der Knotenpunkt muss dargestellt werden. Das wäre bei dem Beispielsystem der Fall, wenn eine Einzellast am oberen mittleren Momentengelenk angreifen würde. Alle angreifenden äußeren Lasten, wie in diesem Fall die Gleichstreckenlast, sind ebenfalls anzutragen.

Die vertikalen Auflagerkräfte berechnen sich über das Gesamtsystem zu $A_V = -15,625 \text{ kN}$ und $B_V = 15,625 \text{ kN}$. Im Folgenden wird das Schnittbild in Abbildung 1.15 mit den fünf Teilsystemen verwendet, um die horizontalen Auflagerkräfte und alle Zwischenkräfte zu ermitteln. Die Ergebnisse sind in Abbildung 1.16 zusammengefasst.

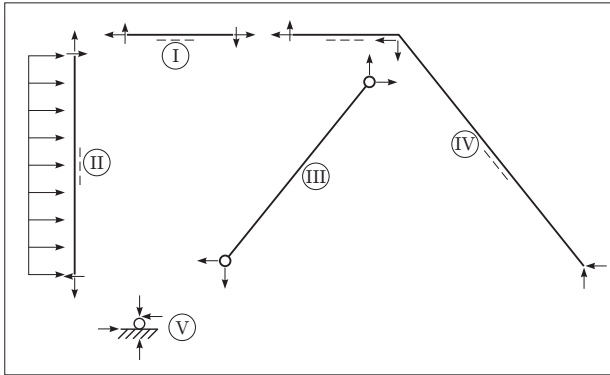


Abb. 1.15. Das System wurde durch Schnitte an Gelenken in fünf Teilsysteme unterteilt. Die frei werdenden Schnittkräfte sind angetragen.

Es bietet sich an, mit dem Teilsystem I oder II zu beginnen, da die Kräfte senkrecht zur Stabachse über das Momentengleichgewicht um eines der Momentengelenke ermittelt werden können. Am System I berechnet sich, da der Stab unbelastet ist¹, die vertikale Komponente zu Null. Diese Null kann am rechten Knoten an das Teilsystem IV und am linken Knoten an das Teilsystem II übergeben werden. Damit ist am Teilsystem II die Normalkraft im Stab bekannt ($N = \text{const.} = 0$). Bildet man am Teilsystem II das Momentengleichgewicht um das untere Gelenk, so erhält man für die horizontale Kraft oben -25 kN . Am unteren Ende hat die horizontale Kraft einen Wert von 25 kN . Die Kräfte an den beiden Stabenden stehen im Gleichgewicht mit der angreifenden Gleichstreckenlast. Das Teilsystem trägt wie ein Einfeldträger unter Gleichlast. Die Horizontalkomponente vom oberen Knoten wird als Normalkraft an das Teilsystem I übergeben. Somit sind für beide Teilsysteme alle Schnittkräfte bekannt.

Als nächstes wird die unbekannte vertikale Schnittkraft am Teilsystem IV (Anschlusspunkt zum Teilsystem III) über die Summe aller vertikalen Kräfte zu $15,625 \text{ kN}$ berechnet. Diese Kraft kann wieder an den oberen Knoten vom Teilsystem III übergeben werden, und somit ist an dem schrägen Pendelstab die vertikale Komponente der Normalkraft bekannt; die horizontale Kraft kann über das Momentengleichgewicht um das untere Gelenk ermittelt werden. Die Horizontalkraft ergibt sich demnach zu $12,5 \text{ kN}$ und kann an das System IV übergeben werden. Folglich ist am Teilsystem IV nur noch die Auflagerkraft B_H unbekannt und wird über die Summe aller horizontalen Lasten zu $B_H = 12,5 \text{ kN}$ bestimmt.

Damit kann über die Summe aller Horizontallasten am Gesamtsystem die letzte fehlende Auflagerkraft bestimmt werden: $A_H = -37,5 \text{ kN}$. Diese Auflagerkraft kann auch über das Kräftegleichgewicht am Anschlussknoten der Teilsysteme II, III und V bestimmt werden, $12,5 + 25 + X_H = 0 \Rightarrow X_H = -37,5$. Diese Kraft muss am Teilsystem V mit der Auflagerkraft A_H im Gleichgewicht sein.

Es geht auch kürzer...

... aber man muss das Schnittprinzip verstanden haben! Ausgangspunkt sind auch hier wieder die am Gesamtsystem ermittelten vertikalen Auflagerkräfte. Der horizon-

¹ Dies ist ein Pendelstab, der nur Normalkräfte und keine Querkräfte überträgt.

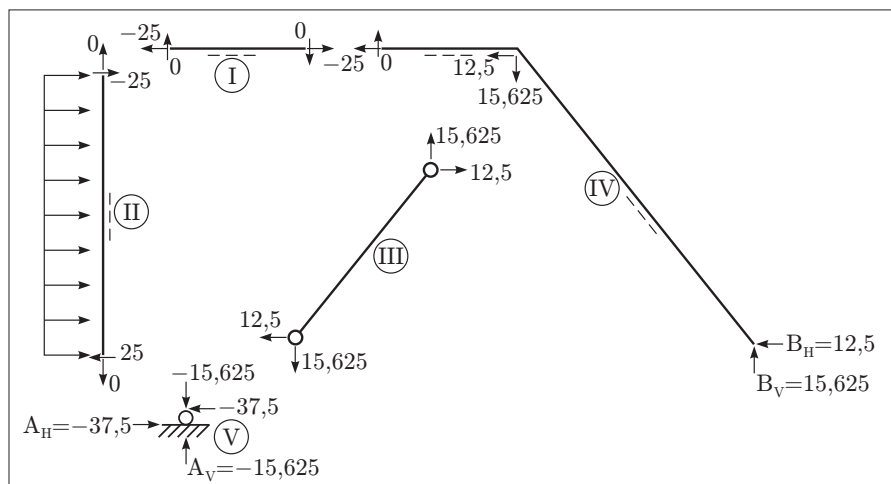


Abb. 1.16. Die Ergebnisse für die Berechnung der Schnittkräfte an der Explosionszeichnung.

tale Pendelstab überträgt keine Querkräfte, und folglich ist in dem gesamten oberen Stab vom Momentengelenk bis zur biegesteifen Ecke die Querkraft Null. Daraus folgt, dass der Momentenverlauf, da die Querkraft die Ableitung vom Moment ist, konstant Null sein muss. Damit ist das Moment an der biegesteifen Ecke bekannt, und es kann das Momentengleichgewicht um diesen Punkt unter Verwendung des Teilsystems *Biegesteife Ecke – Auflager B* die fehlende horizontale Auflagerkraft B_H bestimmt werden. Abschließend wird am Gesamtsystem die Lagerkraft A_H berechnet.

1.3 Lager und Gelenke

1.3.1 Lagerungsarten

Bei der Betrachtung statischer Systeme, ist die Lagerung des Systems besonders wichtig. Erst wenn das Tragwerk im Ganzen unverschieblich ist, ist die Lagerung vernünftig. Anders ausgedrückt: Es müssen so viele Weggrößen am System vorgegeben werden, dass das System sich weder verschieben noch um einen Punkt drehen lässt. Dazu sind grundsätzlich mindestens drei Weggrößen vorzugeben. Aber letztlich beantwortet die Frage der Verschieblichkeit eines Systems, d.h. ob das System kinematisch ist oder nicht, nur eine Polplankonstruktion².

Die möglichen Lagerungsarten sind in Abbildung 1.17 dargestellt. Die Auflager können in 1-, 2- und 3-wertige Lager unterteilt werden, was nichts anders bedeutet, als das entsprechend eine, zwei oder drei Weggrößen zu Null vorgeschrieben sind und

² Näheres hierzu in Kapitel 5.3.

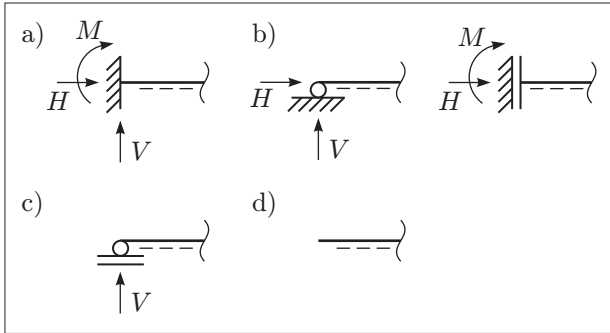


Abb. 1.17. a) 3-wertiges Auflager, b) 2-wertiges Auflager in zwei Varianten, c) 1-wertiges Auflager und d) freies Stabende.

entsprechend viele Lagerreaktionen auftreten können. Bei einem 3-wertigen Auflager, siehe Abbildung 1.17 a, sind alle drei Weggrößen gesperrt, d.h. die vertikale und horizontale Verschiebung und die Verdrehung. Das hat zur Folge, dass die drei eingezeichneten Lagerreaktionen (H , V und M) möglich sind.

In Abbildung 1.17 b sind zwei 2-wertige Lager dargestellt. Allgemein gesprochen bedeutet ein zweiwertiges Auflager, dass zwei Weggrößen zu Null gesetzt sind und eine Weggröße unbekannt ist. Im ersten Fall ist die Verdrehung nicht bekannt, im zweiten Fall ist es die vertikale Absenkung. Für die Theorie allein ist es unwichtig, ob ein solches Auflager realisierbar ist, für die Modellierung von Tragwerken hingegen ist es Grundvoraussetzung.

Als letzte mögliche Lagerungsart verbleibt das 1-wertige Auflager, siehe Abbildung 1.17 c. Bei einem solchen Lager ist nur noch eine Weggröße mit Null vorgegeben, alle anderen Weggrößen sind unbekannt. Sinnvoll sind 1-wertige Auflager nur für die zwei Verschiebungsrichtungen (horizontal oder vertikal). Ein 1-wertiges Auflager, bei dem die Verdrehung zu Null gesetzt ist, ist zwar theoretisch möglich, aber von der Darstellung her schon nicht umzusetzen und nicht denkbar.

Der Vollständigkeit halber ist in der Abbildung 1.17 d ein freier Stabanfang dargestellt. Hier sind alle drei Weggrößen unbekannt und infolge dessen auch keine Lagerreaktionen zu bestimmen. Die Stabendkräfte sind Null.

Schlussfolgerung daraus ist, dass an einer Stelle wo eine Weggröße vorgeschrieben ist, die duale Kraftgröße unbekannt sein muss. Andersherum folgt daraus auch, dass an der Stelle wo eine Kraftgröße vorgegeben ist, die duale Weggröße unbekannt sein muss.

1.3.2 Gelenke in statischen Systemen

Für die weiteren Betrachtungen sind, neben den Auflagern, die Gelenke in einem System von Bedeutung. Sie geben an einer Stelle im System eine Kraftgröße vor, je nach Gelenkart ist das Moment, die Querkraft oder die Normalkraft Null.

Das am meisten verwendete Gelenk ist das Momentengelenk. Die Konstruktion im Tragwerk ist sehr einfach zu realisieren. Z.B. werden beim Stahlbau geschraubte Verbindungen als Momentengelenk angenommen. Eine statisch sinnvolle Konstruktion ist in Abbildung 1.18 dargestellt. Die Übertragung von Quer- und Normalkräften ist mit diesem Gelenk möglich, die Übertragung von Momenten ist aufgrund der

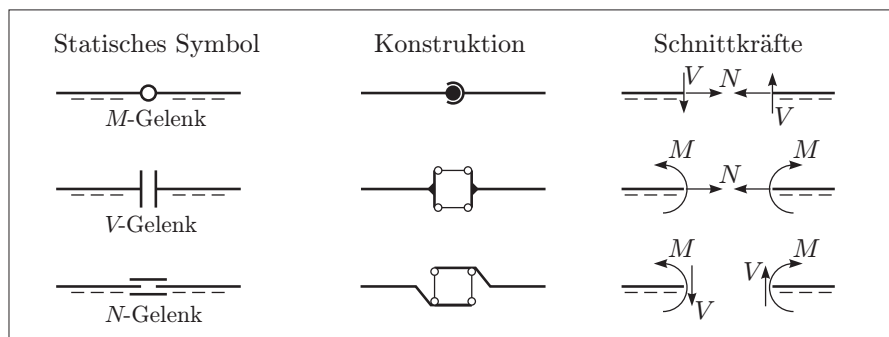


Abb. 1.18. Die drei theoretisch möglichen Gelenkart in einem statischen System, Momenten-, Querkraft und Normalkraftgelenk. Die Konstruktion für solche Gelenke ist in der Mitte dargestellt. Rechts sind die auftretenden Schnittkräfte abgebildet.

zulässigen Drehbewegung im Gelenk nicht möglich. Das Moment im Gelenk muss Null sein.

In der Konstruktion sind Querkraft- und Normalkraftgelenke deutlich aufwändiger als Momentengelenke, in einem statischen System aber sehr gut einsetzbar. In Abbildung 1.18 sind die Konstruktionen für solche Art Gelenk skizziert. Die in der Gelenkkonstruktion eingebauten parallelen Pendelstäbe können Kräfte in Richtung der Pendelstäbe übertragen und gleichzeitig ist die Übertragung von Momenten durch Zerlegung in ein Kräftepaar möglich. Die Schnittkräfte sind in der Abbildung ebenfalls dargestellt.

1.4 Lastannahmen

1.4.1 Was ist die DIN 1055?

Kennzeichen der in den Statikvorlesungen behandelten Themen ist die Gültigkeit für alle konstruktiven Anwendungsfelder. Oft liegt der Schwerpunkt auf den Rechenverfahren zur Schnittgrößenbestimmung. Doch zur Bemessung von Tragwerken bedarf es vor allem der Kenntnis der Belastungen. Denn ohne Lasten gibt es keine Schnittgrößen. Und Belastungen sind im Wesentlichen werkstoffunabhängig. Deshalb wird hier auf die Ermittlung von Belastungen nach DIN 1055 eingegangen, der Norm, die sich mit Lastannahmen beschäftigt. Vorgestellt werden hier die Grundzüge sowie einige Beispiele.

Die DIN 1055 kann zur Findung von Lastannahmen verwendet werden. Angegeben werden Standardwerte für ständige und veränderliche Lasten. Die DIN 1055 ist in mehrere Teile gegliedert, von denen im Rahmen dieser Arbeit folgende kurz vorgestellt werden:

- Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln [9]
- Teil 1: Wichten und Flächenlasten von Baustoffen, Bauteilen und Lagerstoffen [4]

- Teil 3: Eigen- und Nutzlasten für Hochbauten [5]
- Teil 4: Windlasten [6]
- Teil 5: Schnee- und Eislasten [7]

1.4.2 Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln

Begriffe

Zunächst werden die Begriffe definiert, mit denen innerhalb des Regelwerkes gearbeitet werden soll (Auszug aus der [9]).

- *Tragwerk (3.1.1.4): planmäßige Anordnung miteinander verbundener tragender und aussteifender Bauteile, die so entworfen sind, dass sie ein bestimmtes Maß an Tragwiderstand (z.B.: Fundament, Stützen, Riegel, Decken, Trennwände) aufweisen.*
- *Tragsystem (3.1.1.5): Summe der tragenden Bauteile eines Tragwerks und die Art und Weise, in der sie zur Erzielung eines bestimmten Tragwiderstandes zusammenwirken (z.B. Durchlaufträger, Rahmen).*
- *Tragwerksmodell (3.1.1.6): Idealisierung des Tragsystems für Schnittgrößenermittlung und Bemessung.*
- *Einwirkung (3.1.2.1): auf das Tragwerk einwirkende Kraft- oder Verformungsgröße.*
- *Statische Einwirkung (3.1.2.4.1): Einwirkung, die keine wesentliche Beschleunigung des Tragwerks oder Bauteils hervorruft.*
- *Vorwiegend ruhende Einwirkung (3.1.2.4.2): statische Einwirkung und nicht ruhende Einwirkung, die jedoch für die Tragwerksplanung als ruhende Einwirkung betrachtet werden darf (z.B. Nutzlasten in Parkhäusern, Werkstätten, Fabriken, Einwirkungen aus Wind).*
- *Zeitlich veränderliche Einwirkung (3.1.2.5): Einwirkungen, für die die Voraussetzung einer ständigen Einwirkung nicht erfüllt ist, z.B. Nutzlast, Windlast, Schneelast.*
- *Charakteristischer Wert (3.1.2.8.1): wichtigster repräsentativer Wert einer Einwirkung, von dem angenommen wird, dass er mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit im Bezugszeitraum, unter Berücksichtigung der Nutzungsdauer des Tragwerks und der entsprechenden Bemessungssituation nicht überschritten oder unterschritten wird.*
- *Kombinationsbeiwert einer veränderlichen Einwirkung (3.1.2.8.2): repräsentativer Wert in den Einwirkungskombinationen, der die geringere Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Auftretens der ungünstigsten Werte mehrerer voneinander unabhängiger veränderlicher Einwirkungen beschreibt.*
- *Bemessungswert (3.1.2.9): Produkt aus repräsentativem Wert der Einwirkung und dem Teilsicherheitsbeiwert.*
- *Einwirkungskombination (3.1.2.17): Festlegung der Bemessungswerte der gleichzeitig auftretenden Einwirkungen, die für den betrachteten Nachweis entsprechend der Häufigkeit ihres Auftretens zu berücksichtigen sind.*
- *Beanspruchung (3.1.2.20): Folge der gleichzeitig zu betrachtenden Einwirkungen bzw. einer Einwirkungskombination auf das Tragwerk oder seine Teile oder an einem betrachteten Ort (Querschnitt) des Tragwerks.*

- *Festigkeit (3.1.3.1): mechanische Baustoffeigenschaft*
- *Tragwiderstand (3.1.3.2): durch die verwendeten Baustoffe einschließlich ihrer räumlichen Anordnung und den Verbindungsmitteln festgelegte mechanische Eigenschaft des Tragwerks, des Bauteils oder des Bauteilquerschnitts, bestimmten Beanspruchungen zu widerstehen, auch als Beanspruchbarkeit bezeichnet.*
- *Charakteristischer Wert (3.1.3.2.1): durch die charakteristischen Werte der Baustofffestigkeiten und die Nennwerte der Querschnittsgrößen festgelegter Tragwiderstand.*
- *Bemessungswert (3.1.3.2.2): für die Nachweise von Grenzzuständen der Tragfähigkeit zugrunde zu legenden Wert des Tragwiderstandes.*
- *Grenzzustand der Tragfähigkeit (3.1.4.8.1): Zustand des Tragwerks, dessen Überschreitung unmittelbar zu einem rechnerischen Einsturz oder anderen Formen des Versagens führt; der Grenzzustand ergibt sich im Allgemeinen aus dem kleinsten rechnerischen Tragwiderstand.*
- *Grenzzustand der Gebrauchstauglichkeit (3.1.4.8.2): Zustand des Tragwerks, bei dessen Überschreitung, die für die Nutzung festgelegten Bedingungen nicht mehr erfüllt sind. Es wird dabei unterschieden zwischen einem umkehrbaren Grenzzustand [...] und einem nicht umkehrbaren Grenzzustand [...].*
- *Teilsicherheitsbeiwert (3.1.4.9): Beiwert zur Bestimmung des Bemessungswertes von Einwirkungen, von Beanspruchungen oder von Tragwiderständen aus den repräsentativen bzw. charakteristischen Werten.*

Bemessungsschritte

Ein Tragwerk ist so zu bemessen, dass ein (Teil-)Versagen des Bauwerkes oder Beschädigungen an anderen Bauwerken verhindert werden. Das Bauwerk ist so zu gestalten, dass es innerhalb der Nutzungsdauer keine Einschränkungen der Nutzung gibt.

- Auswahl der Bemessungssituation
- Unterscheidung nach Tragfähigkeit und Gebrauchstauglichkeit
- Aufstellung des Tragwerks- und Lastmodells
- Nachweis, dass die Grenzzustände eingehalten werden, also $E_d \leq R_d$ mit Einwirkung E und Widerstand R .

Bemessungssituationen

Für eine Bemessungssituation mit ständigen und vorübergehenden Belastungen, nicht aber außergewöhnliche Belastungen oder Erdbeben, gilt für die Bemessungswerte der Einwirkungen:

- Ständige Einwirkung $G_d = \gamma_G \cdot G_k$
- Vorherrschende veränderliche Einwirkung $Q_d = \gamma_{Q,1} \cdot Q_{k,1}$
- Andere veränderliche Einwirkungen $Q_{d,i} = \gamma_{Q,i} \cdot \psi_{0,i} \cdot Q_{k,i}$

Zu den ständigen Einwirkungen zählen Eigenlasten G_k und Erddruck $G_{k,E}$. Demgegenüber sind Nutz- und Verkehrslasten $Q_{k,N}$, Schnee- und Eislasten $Q_{k,S}$ und Windlasten $Q_{k,W}$ veränderliche Einwirkungen.

Für einen Nachweis im Rahmen der Gebrauchstauglichkeit gilt für eine quasi-ständige Bemessungssituation:

- Ständige Einwirkung $G_d = G_k$, also keine Abminderung
- Veränderliche Einwirkung $Q_{d,i} = \psi_2 \cdot Q_{k,i}$

Kombinationsbeiwerte ψ_i

Die Beiwerte ψ variieren je nach Art der Last sowie Bemessungssituation. Hinweis: Bei häufigen Kombinationen wird die vorherrschende veränderliche Einwirkung nicht über ψ_2 sondern ψ_1 bestimmt. Einige Kombinationsbeiwerte sind in Tabelle 1.2 aufgeführt.

Tabelle 1.2. Kombinationsbeiwerte.

Nutzung	ψ_0	ψ_1	ψ_2
Wohn-, Aufenthalts- und Büroräume	0,7	0,5	0,4
Verkehrslasten (Fahrzeuge bis 30 kN)	0,7	0,7	0,6
Schneelasten bis 1.000 mNN	0,5	0,2	0
Schneelasten ab 1.000 mNN	0,7	0,5	0,3
Windlasten	0,6	0,5	0

Charakteristische Werte

Die charakteristischen Werte für Einwirkungen ergeben sich aus

- dem Mittelwert der gemessenen Einwirkungen für ständige Einwirkungen
- einem oberen Wert der Einwirkung, der mit einer festgelegten Wahrscheinlichkeit von 98 Prozent in einem Jahr oder nicht häufiger als einmal in 50 Jahren überschritten wird.

Bemessungswerte der Einwirkungen

Die Einwirkungen werden durch Teilsicherheitsbeiwerte modifiziert, wie später noch gezeigt wird. Zu unterscheiden sind ungünstige und günstige Einwirkungen. Ungünstig ist in diesem Fall eine *Belastung* Tragwerks und günstig eine *Entlastung* des Tragwerks. Für Betrachtungen der Tragfähigkeit gilt im Wesentlichen:

- ständige und gleichzeitig ungünstige Einwirkungen: $\gamma_G = 1,35$
- ständige und gleichzeitig günstige Einwirkungen: $\gamma_G = 1,0$
- veränderliche und gleichzeitig ungünstige Einwirkungen: $\gamma_Q = 1,5$
- veränderliche und gleichzeitig günstige Einwirkungen: $\gamma_Q = 0$

Die Gleichung zur Berechnung der Bemessungseinwirkung lautet

$$E_d = E_k \cdot \gamma_{G/Q}.$$

Bemessungswerte der Widerstände

Die Baustoffeigenschaft X hat den Bemessungswert $X_d = X_k/\gamma_M$, wobei γ_M der Teilsicherheitsbeiwert ist und X_k die charakteristische Baustoffeigenschaft. Die Ermittlung der charakteristischen Festigkeiten ist im Anhang der DIN erklärt und ergibt sich aus einer statistischen Auswertung von Materialprüfversuchen. Bei geometrischen Größen ist auf Toleranzen zu achten, denn sie sind in die Bemessung mit einzubeziehen.

1.4.3 Teil 1: Wichten und Flächenlasten von Baustoffen, Bauteilen und Lagerstoffen

Die Eigengewichtslasten ergeben sich aus Querschnittsabmessung und den Wichten. Für den Ingenieurbau sind unter anderem interessant

- Normalbeton $\gamma = 24 \text{ kN/m}^3$
- Stahlbeton $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$
- Mauerwerk (Rohdichteklasse 1,0) $\gamma = 12 \text{ kN/m}^3$
- Gips-Wandbauplatten nach DIN EN 12859 und Gipskartonplatten nach DIN 18180 je cm Plattendicke $q = 0,09 \text{ kN/m}^2$
- Sandstein $\gamma = 27 \text{ kN/m}^3$
- Tuffstein $\gamma = 20 \text{ kN/m}^3$
- Gipsputz, Dicke 15 mm $q = 0,18 \text{ kN/m}^2$
- Wärmedämmverbundsystem $q = 0,30 \text{ kN/m}^2$
- Zementmörtel, Dicke 20 mm $q = 0,42 \text{ kN/m}^2$
- Stahl $\gamma = 78,5 \text{ kN/m}^3$
- Aluminium $\gamma = 27 \text{ kN/m}^3$
- Nadelholz $\gamma = 5,0 \text{ kN/m}^3$
- Laubholz D60 $\gamma = 9,0 \text{ kN/m}^3$
- Holzfaserplatten, HFM nach DIN 68754-1 $\gamma = 7 \text{ kN/m}^3$
- Holzfaserplatten, HFH nach DIN 68754-1 $\gamma = 10 \text{ kN/m}^3$
- Asphaltmastix, Schichtdicke 10 mm $q = 0,18 \text{ kN/m}^2$
- Gipsestrich, Schichtdicke 10 mm $q = 0,20 \text{ kN/m}^2$
- Glasscheiben, Dicke 10 mm $q = 0,25 \text{ kN/m}^2$
- Linoleum, Dicke 10 mm $q = 0,13 \text{ kN/m}^2$
- Dachsteine bis 10 Stück je Quadratmeter $q = 0,50 \text{ kN/m}^2$
- Wellblechdach $q = 0,25 \text{ kN/m}^2$
- Faserzement-Wellplatten je Lage $q = 0,20 \text{ kN/m}^2$
- Bitumenbahn eingebaut je Lage $q = 0,07 \text{ kN/m}^2$
- Kiesschüttung, Dicke 5 cm $q = 1,0 \text{ kN/m}^2$

1.4.4 Teil 3: Eigen- und Nutzlasten für Hochbauten

Nutzlasten werden als Flächen- oder Einzellast angegeben. Die Einzellasten beziehen sich auf eine Aufstandsfläche von $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$. Außer den im Folgenden exemplarisch aufgeführten Lasten werden in der DIN auch Belastungen infolge Kfz- und Hubschrauberkehr beschrieben.

- Wohn- und Aufenthaltsbereiche $q_k = 1,5 \text{ kN/m}^2$, $Q_k = \text{n.n. kN}$
- Büro- und Arbeitsflächen, Flure $q_k = 2,0 \text{ kN/m}^2$, $Q_k = 2,0 \text{ kN}$
- Büro- und Arbeitsflächen, Flure bei schwerem Geräteeinsatz $q_k = 5,0 \text{ kN/m}^2$, $Q_k = 4,0 \text{ kN}$
- Versammlungsräume $q_k = 3,0 \text{ kN/m}^2$, $Q_k = 4,0 \text{ kN}$
- Sport- und Spielflächen sowie Bühnen $q_k = 5,0 \text{ kN/m}^2$, $Q_k = 7,0 \text{ kN}$
- Wohn- und Aufenthaltsbereiche $q_k = 1,0 \text{ kN/m}^2$, $Q_k = 1,0 \text{ kN}$
- Fabriken, Werkstätten und Orte für erhebliche Menschenansammlungen $q_k = 7,5 \text{ kN/m}^2$, $Q_k = 10 \text{ kN}$
- Treppen ohne nennenswerten Publikumsverkehr $q_k = 3,0 \text{ kN/m}^2$, $Q_k = 2,0 \text{ kN}$
- Treppen mit nennenswertem Publikumsverkehr und Fluchtwegtreppen $q_k = 5,0 \text{ kN/m}^2$, $Q_k = 2,0 \text{ kN}$
- Balkone und Dachterrassen $q_k = 4,0 \text{ kN/m}^2$, $Q_k = 2,0 \text{ kN}$

1.4.5 Teil 4: Windlasten

Die Berücksichtigung der Windlast ist gerade für die Bemessung von Dachkonstruktionen von Häusern wichtig. Darüber hinaus spielt die Bestimmung der Windlast für größere auszusteiende Bauwerke, die eine große Windangriffsfläche bieten, eine Rolle. Hier wird lediglich die Berechnung der Windlasten für nichtschwingungsanfällige Bauwerke beschrieben.

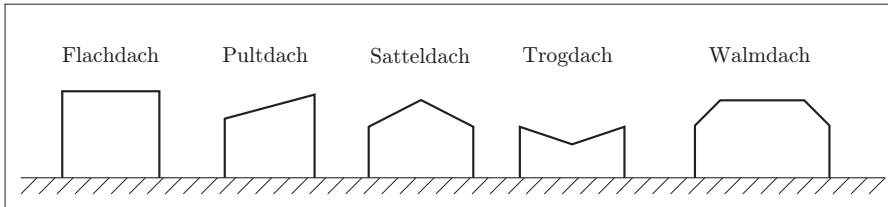


Abb. 1.19. Die unterschiedlichen Dachformen.

Der Winddruck wird über die Formel

$$w_e = c_{pe} \cdot q(z_e)$$

für den Außenwinddruck bzw. mit dem Index i für den Innendruck bestimmt. Dabei ist c_{pe} der aerodynamische Beiwert und q ist der Geschwindigkeitsdruck in Abhängigkeit der Bezugshöhe z_e .

Nach der DIN werden die Bauwerke in Bauwerke bis 25 m und Bauwerke über 25 m über Grund eingeteilt. Für erstere gelten für die Bestimmung des Böengeschwindigkeitsdrucks q vereinfachte Annahmen. Bei Bauwerken über der Höhengrenze von 25 m fließt die Rauigkeit der Geländeoberfläche ein; es wird in Geländekategorie I (offenes Gelände) bis Kategorie IV (Stadtgebiet) unterschieden. Die Formeln für die Berechnung des von der Bezugshöhe abhängigen Geschwindigkeitsdrucks sind der DIN 1055-4 zu entnehmen. Das Bundesgebiet ist darüber hinaus in die Windzonen 1 bis 4 eingeteilt. Mit dieser Einteilung lässt sich der Referenzgeschwindigkeitsdruck q_{ref} aus einer Tabelle ermitteln.

Für niedrigere Bauwerke (bis 25 m) wird der Geschwindigkeitsdruck aus einer Tabelle abgelesen, in der die Gebäudehöhe in drei Bereiche ($h \leq 10$ m, $10 \text{ m} < h \leq 18$ m und $18 \text{ m} < h \leq 25$ m) eingeteilt wird.

Der aerodynamische Beiwert ist grundsätzlich abhängig von der Größe der Last-einzugsfläche A . Zwischen $1 \text{ m}^2 < A \leq 10 \text{ m}^2$ ist die Gleichung

$$c_{pe} = c_{pe,1} + (c_{pe,10} - c_{pe,1}) \cdot \lg A$$

zu verwenden. Die Werte für eine Last-einzugsfläche kleiner 1 m^2 bzw. größer 10 m^2 sind aus Tabellen der DIN zu entnehmen. Die entsprechende Tabelle richtet sich für vertikale Wände nach der Gebäudegeometrie und für Dachflächen nach der Dachart (siehe Abbildung 1.19).

Die Dachflächen werden in unterschiedliche Bereiche eingeteilt und bekommen entsprechende Beiwerte zugewiesen. Beispielhaft ist eine solche Einteilung für ein Satteldach in Abbildung 1.20 dargestellt.

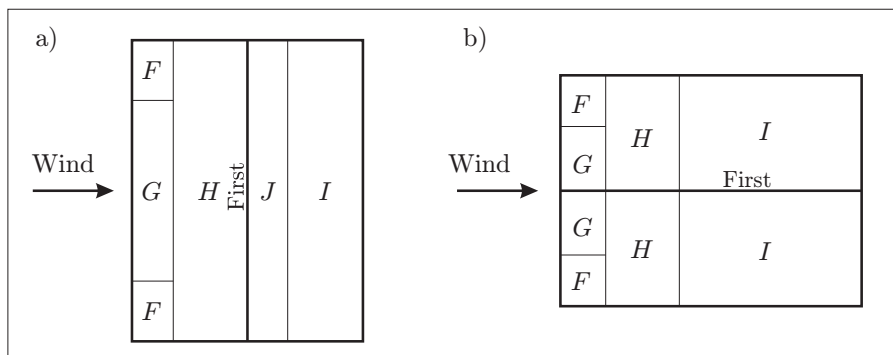


Abb. 1.20. Einteilung eines Satteldaches in die nach der DIN vorgegebenen Bereiche. a) Windanströmrichtung $\theta = 0^\circ$ und b) Windanströmrichtung $\theta = 90^\circ$.

Die Resultierende der Windlast, die auf ein Bauteil einwirkt, berechnet sich wie folgt:

$$F_w = c_f \cdot q(z_e) \cdot A_{\text{ref}}.$$

Folglich ist der berechnete Winddruck w_e mit der Bezugsfläche A_{ref} nach DIN zu multiplizieren. Für weitere Fallunterscheidungen wird auf die DIN, siehe [6], verwiesen.

1.4.6 Teil 5: Schnee- und Eislasten

Die Bemessung von Tragwerken erfolgt nicht nur infolge Eigengewicht und Nutzlast. Vielmehr spielen auch die äußeren Einflüsse eine Rolle. Dazu gehören vor allem Schnee- und Eislasten. Die Anwendung der Norm beschränkt sich auf Bauwerke an Orten, die nicht höher als 1500 m über NN liegen. Gegebenenfalls sind Einzelermittlungen notwendig. Schneelasten s_k sind unabhängige veränderliche Lasten und werden deshalb nicht über einen Kombinationsbeiwert abgemindert. Zunächst ist das betreffende Gebiet mittels Schneelastzonenkarte einer Zone zuzuordnen (siehe Abbildung 1.21).

Die Schneelast in der NN-Höhe A kann aus empirischen Formeln, welche auch Abbildung 1.21 b zugrunde liegen, errechnet werden:

- in Zone 1 gilt $s_k = 0,19 + 0,91 \cdot \left(\frac{A+140}{760}\right)^2 \geq 0,65$
- in Zone 2 gilt $s_k = 0,25 + 1,91 \cdot \left(\frac{A+140}{760}\right)^2 \geq 0,85$
- in Zone 3 gilt $s_k = 0,31 + 2,91 \cdot \left(\frac{A+140}{760}\right)^2 \geq 1,10$

Die Schneelast wird in Abhängigkeit von der Dachform und -neigung modifiziert:

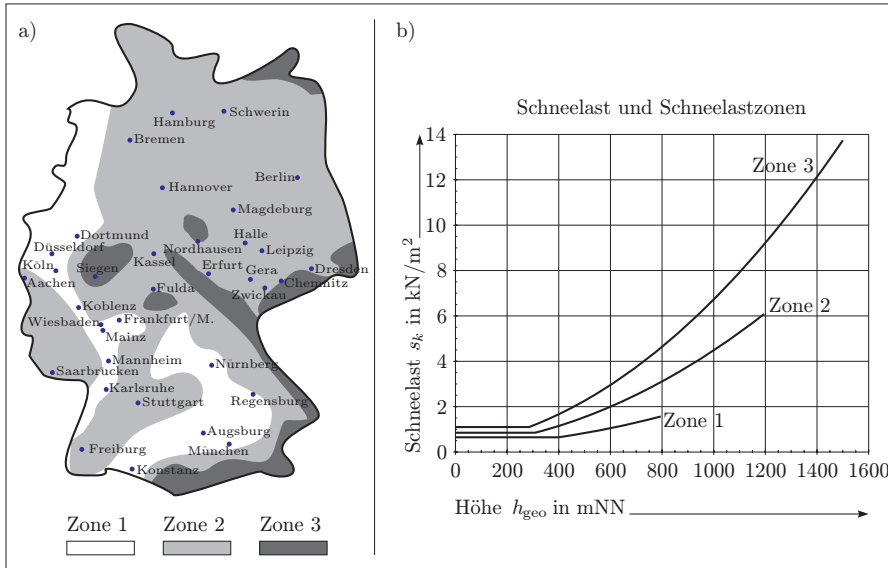
$$q_k = s_k \cdot \mu.$$

Zu unterscheiden sind nach Tabelle 1.3:

- Satteldach: Faktor μ_1 für die gesamte Schneelast

Tabelle 1.3. Formbeiwerte für die Dachneigung.

Dachneigung α [Grad]	0 bis 30	30 bis 60	über 60
Formbeiwert μ_1	0,8	$0,8(60-\alpha)/30$	0
Formbeiwert μ_2	$0,8+0,8\alpha/30$	1,6	1,6

**Abb. 1.21.** a) Skizze der Schneelastzonenkarte und b) Charakteristische Werte der Schneelast s_k im Diagramm

- Scheddach: Faktor μ_1 für die Traufkante und μ_2 für die Firstkante, dazwischen linear veränderlich (siehe Abbildung 1.22)

Die Norm enthält auch Angaben zu Tonnendächern und Stufen, an denen sich Schnee ansammeln kann, es wird hier jedoch nicht weiter darauf eingegangen. Im Anhang zu [7] finden sich auch Angaben zu Eislasten. Diese werden entsprechend der geographischen Lage und den Bauteilgeometrien gebildet. Diese Thematik wird hier jedoch nicht weiter vertieft.

1.4.7 Beispiel

Für das in Abbildung 1.23 dargestellte Bauwerk sollen für eine Bauwerkstiefe von 1 m die Kräfte bestimmt werden, welche vom Dachgeschoss (Dach, Dremmel, Deckenplatte) auf den Unterbau (Wände) übertragen werden. Die zu übertragenden Kräfte sind in kN/m anzugeben. Das Gebäude ist in einem Tal in einer Mittelgebirgsregion (200 mNN) zu errichten. Der Lastfall *Windlast* wird bei diesem Beispiel nicht berücksichtigt.

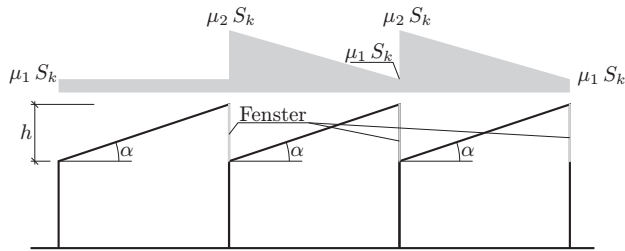


Abb. 1.22. Schneelastverteilung auf einem Scheddach nach DIN 1055-5.

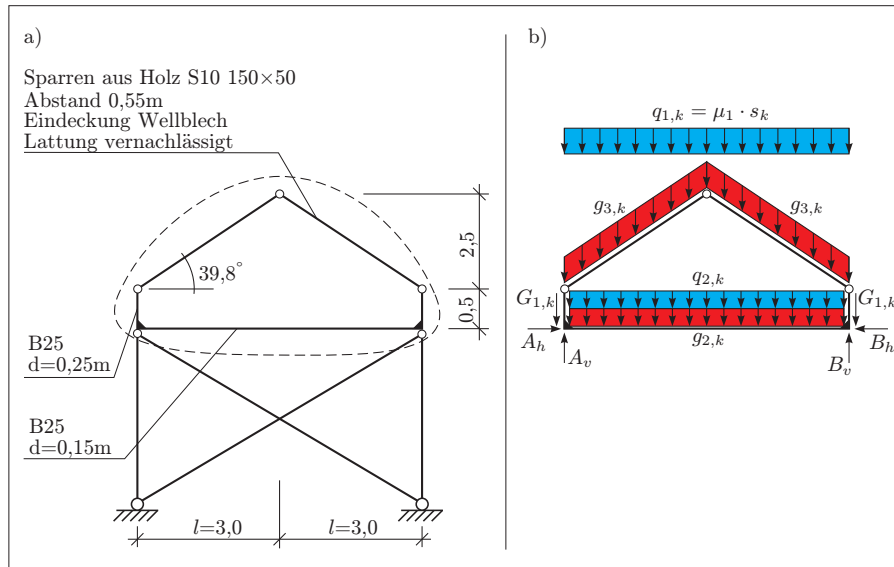


Abb. 1.23. Beispiel zu Lastannahmen: a) System und b) Dachgeschoss mit Lasten.

Bestimmung der charakteristischen Lasten

Die ständigen Lasten G ergeben sich aus den Wichten und Querschnittswerten, die veränderlichen Lasten aus den Tabellen und Diagrammen.

Schneelast: Zone 2, 200 m

$$s_k = 0,25 + 1,91 \cdot \left(\frac{A + 140}{760} \right)^2 = 0,632 < s_{k,\min} = 0,85 \text{ kN/m}^2.$$

$$\mu_1 = 0,8 \cdot (60 - \alpha) / 30 = 0,54$$

Damit ergibt sich die Schneelast zu

$$q_{1,k} = \mu_1 \cdot s_k = 0,54 \cdot 0,85 = 0,46 \text{ kN/m}^2.$$

Verkehrslast Wohnraum:

$$q_{2,k} = 1,5 \text{ kN/m}^2$$

Seitenwände B25 (25 kN/m³):

$$G_{1,k} = 0,25 \cdot 25 \cdot 0,5 = 3,125 \text{ kN/m}$$

Decke B25 (25 kN/m³):

$$g_{2,k} = 0,15 \cdot 25 = 3,75 \text{ kN/m}^2$$

Eigengewicht Sparren 150×50 (5 kN/m³) und Wellblech (0,25 kN/m²):

$$g_{3,k} = (0,15 \cdot 0,05 \cdot 5,0 \cdot 1/0,55 + 0,25) \cdot \cos \alpha = 0,244 \text{ kN/m}^2$$

Ermittlung der abzutragenden Kräfte (Bemessungswerte)

Die horizontalen Kräfte sind gleich Null, weil die Lasten über die Decke selbst (Zugband) abgetragen werden können³:

$$A_{h,k} = B_{h,k} = 0.$$

Wegen Symmetrie gilt

$$A_v = B_v.$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} A_{v,d} &= l \cdot q_{2,k} \cdot \gamma_Q + l \cdot q_{1,k} \cdot \gamma_Q \cdot \psi_0 + (G_{1,k} + g_{3,k} \cdot l + \frac{g_{3,k} \cdot l}{\cos \alpha}) \cdot \gamma_G \\ &= 3,0 \cdot 1,5 \cdot 1,5 + 3,0 \cdot 0,46 \cdot 1,5 \cdot 0,5 \\ &\quad + (3,125 + 3,75 \cdot 3,0 + \frac{0,244 \cdot 3,0}{\cos 39,8}) \cdot 1,35 \\ &= 28,6 \text{ kN/m}. \end{aligned}$$

1.5 Addition von Lastfällen

1.5.1 Lagerreaktionen und Schnittgrößen

Komplizierte Belastungen können in einzelne Lastfälle aufgeteilt werden. Nachdem die Schnittgrößen für die einzelnen Lastfälle berechnet worden sind, können die Ergebnisse einfach addiert werden⁴, um die Ergebnisse für die Gesamtlast zu erhalten. Diese Methode funktioniert bei linear elastischen Berechnungen, also nur nach Theorie 1. Ordnung. Für die üblichere Berechnung der Schnittgrößen am unverformten System führt diese Vorgehensweise immer zu richtigen Ergebnissen.

Vor allem vor dem Hintergrund des aktuellen Bemessungskonzepts und der Bewertung einzelner Lastarten ist eine Lastaufteilung sinnvoll. So können die Schnittgrößen und Lagerreaktionen für jede Lastart einzeln berechnet werden. Erst bei der Auswertung müssen dann die Kombinations- und Sicherheitsbeiwerte berücksichtigt werden.

³ Diese Annahme beruht darauf, dass die Decke steifer ist, als das darunter liegende Mauerwerk der Wände. Ansonsten würden die Wände beziehungsweise der eingebaute Ringanker/-balken einen Teil der Lasten aufnehmen.

⁴ gemäß dem Superpositionsprinzip der linearen Statik

Die Aufteilung in Lastfälle wird für die Berechnung mittels numerischer Verfahren häufig verwendet, da dort die Gesamtsteifigkeitsmatrix unabhängig von den Belastungen ist, ihre Berechnung aber einen nicht unerheblichen Teil des Aufwandes darstellt. Mit der einen Steifigkeitsmatrix werden dann die Ergebnisse für jeden einzelnen Lastfall bestimmt und anschließend dokumentiert. Aus den einzelnen Ergebnissen lassen sich dann durch Addition die Endergebnisse für die gewünschten Belastungskombinationen errechnen.

1.5.2 Durchlaufträger

In Abbildung 1.24 ist die Addition von Belastungen und Schnittgrößen dargestellt. Ausgangspunkt sind die beiden Grundstrukturen

- Balken auf zwei Stützen und
- Kragarm.

Wird ein Durchlaufträger nun in einem Außenfeld belastet, so trägt der Träger dort wie ein Kragarm ab, im Mittelfeld wird das Biegemoment abgebaut, und jenseits des zweiten Lagers sind die Schnittkräfte Null. Werden beide Außenfelder belastet, so tragen diese wieder wie Kragarme ab, das Mittelfeld dient dem Ausgleich der Stützmomente, wobei in Feldmitte gerade auch der Mittelwert der Stützmomente als Biegemoment zu finden ist. Wird nun der gesamte Träger belastet, so tragen die Außenfelder wie Kragarme und das Mittelfeld wie ein Balken auf zwei Stützen die Last ab, die Momente werden einfach addiert. Je nach Geometrie und Belastungsrichtung und -betrag können natürlich auch positive Biegemomente entstehen. Häufig biegt sich das Mittelfeld nach unten durch, so dass das Moment dort auch einen Vorzeichenwechsel erfährt.

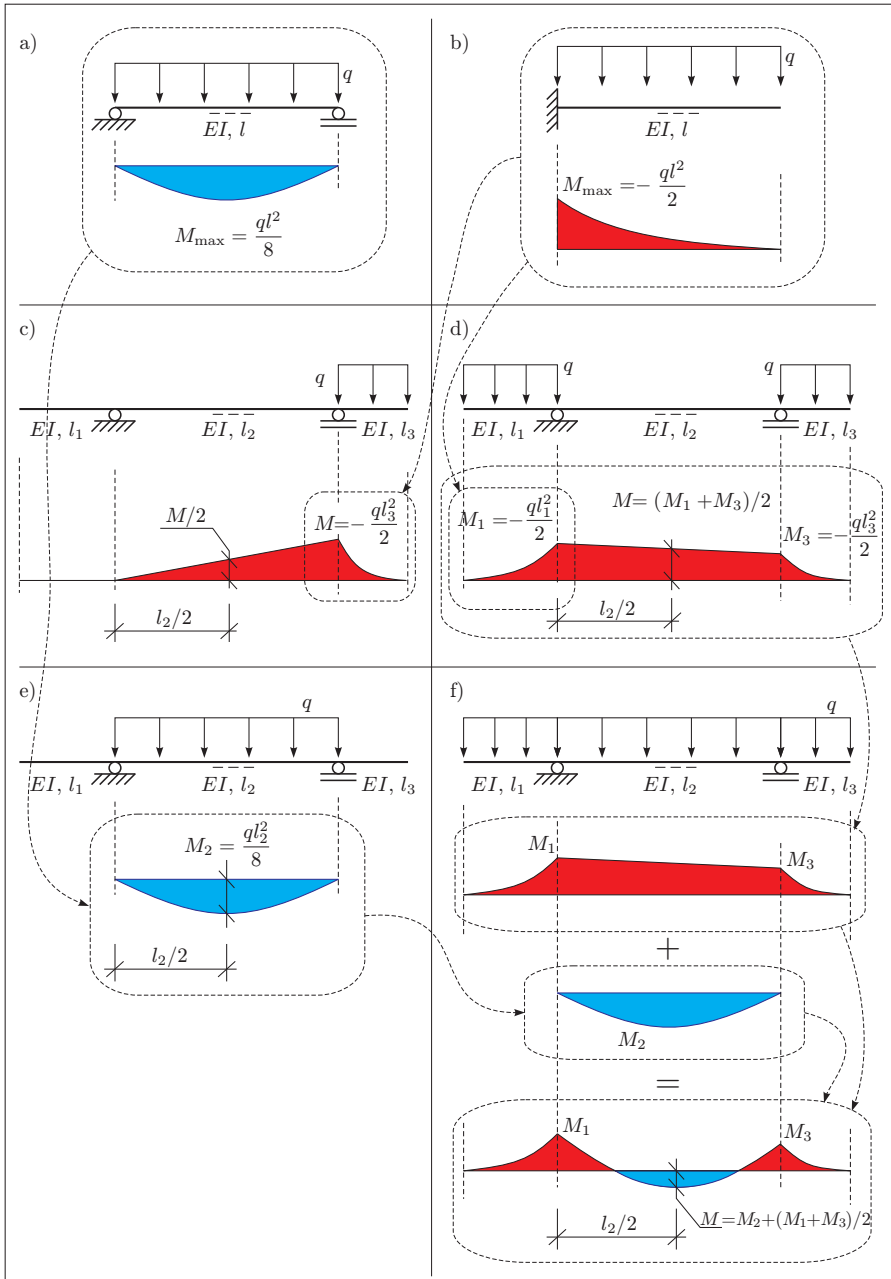


Abb. 1.24. a) Balken auf zwei Stützen und b) Kragarm mit Gleichstreckenlast. Durchlaufträger mit Lasten c) im rechten Feld, d) in den Außenfeldern, e) im Mittelfeld und f) auf dem gesamten Träger.

1.6 Fragerunde

1. Was ist das Schnittprinzip? Wie werden positives und negatives Schnittufer unterschieden?
2. Wofür ist die Bezugsfaser gut? Hängt die Bemessung eines Bauteils von der Bezugsfaser ab?
3. Warum werden günstig wirkende Einwirkungen vernachlässigt, wenn sie veränderlich sind, nicht aber, wenn sie ständig wirken?
4. Wozu sollte man die differentiellen Beziehungen zwischen den Schnittgrößen kennen?
5. In diesem Buch steht nicht, was das Tonti-Schema ist. Aber finden Sie es ruhig heraus, es könnte nützlich sein! Als Literatur zu diesem Thema wird [1] empfohlen.
6. Warum kann man Lasten in Lastfälle aufteilen und aus den Ergebnissen für die einzelnen Lastfälle durch Addition die Ergebnisse für die gesamte Last berechnen? Gibt es Einschränkungen?

Kraftgrößenverfahren

2.1 Einführung

2.1.1 Umwege zum Ziel

In den Grundlagen wurde das Schnittprinzip vorgestellt. Mit diesem Prinzip ist es möglich, Kräfte in statischen Systemen zu beschreiben. Ausgenutzt wird, dass bei statisch bestimmten Systemen sowohl am globalen System wie auch an den Teilsystemen die resultierenden Momente und Kräfte stets Null sein müssen, somit die angreifenden Lasten, Schnittgrößen und Lagerreaktionen im Gleichgewicht stehen. Für ein statisch bestimmtes System lassen sich immer so viele unabhängige Gleichungen aufstellen, wie unbekannte Kraftgrößen vorhanden sind.

Das gelingt bei statisch unbestimmten Systemen nicht mehr. Die Lasten stehen nach wie vor im Gleichgewicht, aber die Gleichungen sind nicht mehr unabhängig. Das Kraftgrößenverfahren macht das Schnittprinzip für statisch unbestimmte Systeme verfügbar.

2.1.2 Statische Unbestimmtheit

Ein statisch bestimmtes System lässt sich mittels Schnittprinzip berechnen, weil genügend Bestimmungsgleichungen aus *Gleichgewichtsbedingungen* der Schnittgrößen gefunden werden können. Für ein statisch unbestimmtes System wird deshalb mindestens eine *Verformungsbedingung* eingeführt. Es werden Gelenke in das System eingebaut und an diesen Stellen über die Arbeitsgleichung die Verformung gemessen. Als Verformungsbedingung an diesen Stellen gilt nun, dass keine Knicke für Momentengelenke und keine Sprünge für Normal- und Querkraftgelenke entstehen dürfen, denn im statisch unbestimmten System sind solche Verformungen nicht zulässig. Dies geschieht jedoch nicht auf sehr offensichtliche Weise und wird deshalb kaum wahrgenommen.

Statisch unbestimmte Systeme sind übrigens steifer als statisch bestimmte. Wird bei statisch bestimmten Systemen ein Gelenk eingefügt oder ein Lager entfernt, so wird es kinematisch und fällt wie ein Kartenhaus zusammen. Bei statisch unbestimmten Systemen hat das Wegfallen eines Lagers oder das Einfügen eines Gelenkes in Abhängigkeit von der statischen Unbestimmtheit noch keine gravierenden Folgen.

Somit besteht zunächst die Aufgabe, den Grad der statischen Unbestimmtheit n festzustellen. Hier gibt es zwei Möglichkeiten:

Ebene Tragwerke

Verwendet wird das Abzählkriterium, es lautet

$$n = a + 3(p - k) - r$$

mit der Anzahl der Auflagerreaktionen a , Anzahl der Stäbe p zwischen den Knoten, Anzahl der Knoten k sowie der Anzahl der Nebenbedingungen r . Die Werte für die Parameter p und k sind leicht zu finden. Die Bestimmung der Gelenke r und die Anzahl der Auflager a bei ebenen Tragwerken erfordert einige Übung. Die wichtigsten Fälle sind in der Abbildung 2.1 dargestellt.

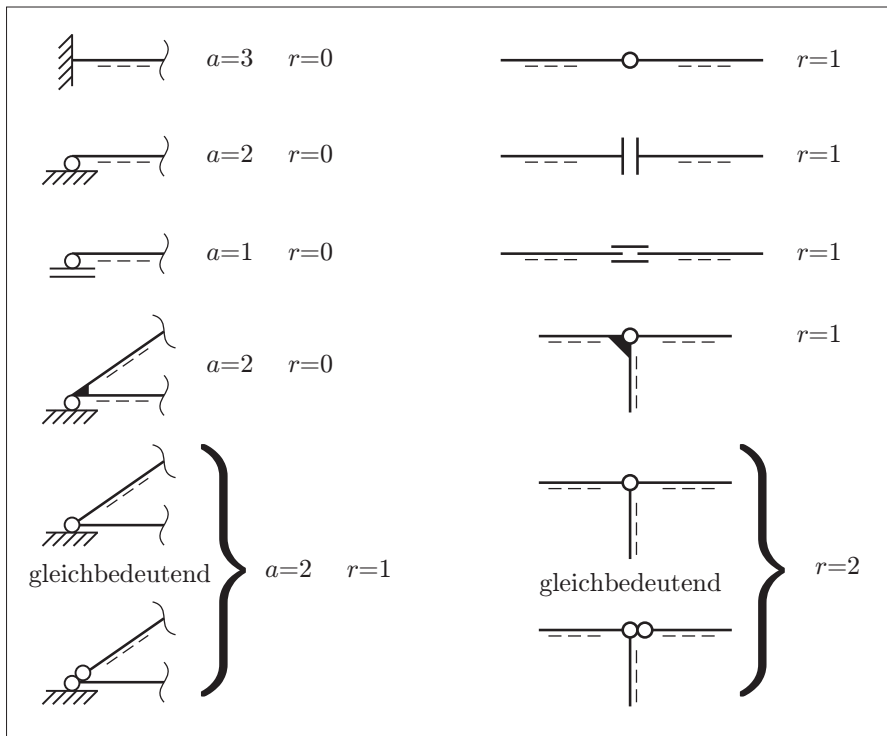


Abb. 2.1. Darstellung von Lagern und Gelenken in der Statik. Die Parameter a und r werden in die Bestimmungsgleichung für die statische Unbestimmtheit eingesetzt.

Die beiden Rahmen in Abbildung 2.2 zeigen, dass ungeübte Bearbeiter hier viele Fehler machen können. Vor allem die Lager sind anfällig für Fehlinterpretationen, gerade wenn die Systemskizzen ungenau angefertigt sind. Beim oberen Rahmen

(Abbildung 2.1 a) sind die Mehrfachgelenke entscheidend. Die Berechnung der Lagerkräfte für den unteren Rahmen (Abbildung 2.1 b) ist auch ohne statisch unbestimmte Betrachtung möglich, weil das System nur innerlich statisch unbestimmt ist, äußerlich jedoch statisch bestimmt.

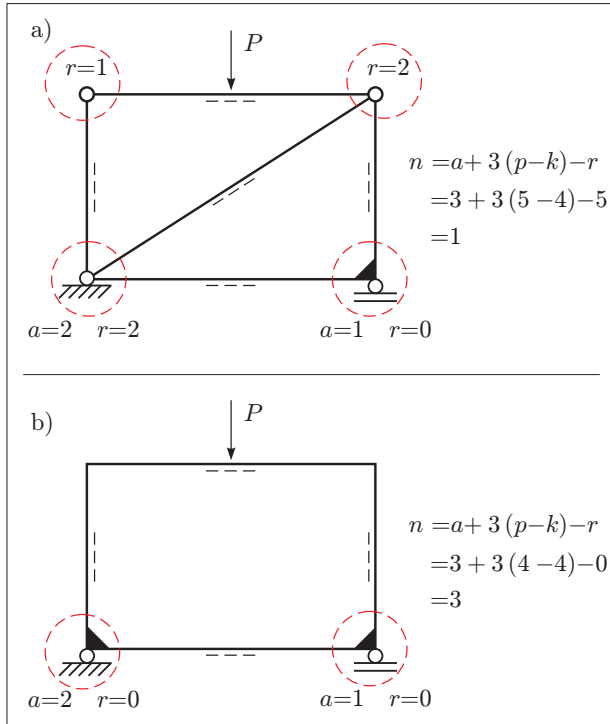


Abb. 2.2. a) Rahmen mit Mehrfachgelenken und b) äußerlich statisch bestimmter Rahmen, der innerlich aber statisch unbestimmt ist.

Räumliche Tragwerke

Der Grad der statischen Unbestimmtheit wird über das Entfernen von Pendelstäben (Freischneiden der Normalkraft!) und Lagerreaktionen bestimmt. Die Anwendung des Abzählkriteriums ist hier heikel, denn die Deutung der dargestellten Gelenke kann schnell misslingen. Hierzu ist nämlich zu wissen, dass ein Kugelgelenk eigentlich ein Gelenk für alle Rotationsfreiheitsgrade symbolisiert (M_x , M_y , M_z). Dann wäre das System aber genau an Pendelstäben kinematisch. Welche Momente gesperrt und welche freigegeben werden, ist also nicht direkt zu erkennen. Deshalb wird eine Reduktion auf statisch bestimmte Teilsysteme angestrebt, beispielsweise durch Einfügen von Quer- und Normalkraftgelenken oder das Entfernen von Lagerreaktionen (siehe Abbildung 2.3).

Weiter steht auch für räumliche Systeme das Abzählkriterium mit einer kleinen Änderung zur Verfügung:

$$n = a + 6(p - k) - r. \quad (2.1)$$

Dieses Thema wird ausführlich in Kapitel 2.6 behandelt.

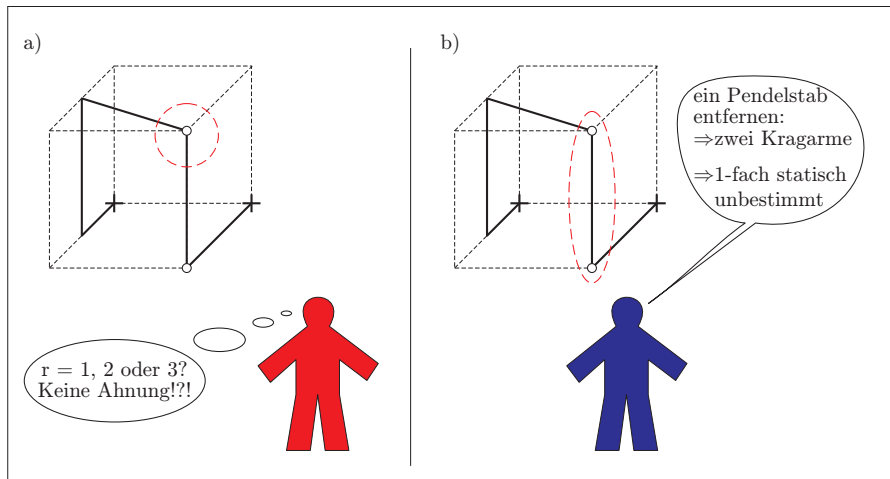


Abb. 2.3. Bestimmung des Grades der statischen Unbestimmtheit bei räumlichen Tragwerken. Sicherer als das Abzählkriterium erscheint hier die Elimination der Pendelstäbe.

2.1.3 Statisch bestimmt – statisch unbestimmt

Bevor nun im Folgenden die Berechnung von Schnittkraftverläufen an statisch unbestimmten Systemen dargestellt wird, sollen zunächst einmal die allgemeinen Eigenschaften von statisch bestimmten und unbestimmten Systemen vorgestellt werden. Die Kenntnis der Vor- und Nachteile der beiden Systeme ist für die Planung von Tragwerken von großer Bedeutung.

Statisch bestimmte Systeme

besitzen die Eigenschaft, dass das Versagen eines Bauteils, z.B. eines Stabes oder der Ausfall eines Auflagers, einen kompletten Verlust der Tragfähigkeit zur Folge haben kann. Das System wird kinematisch und fällt in sich zusammen. Für Tragstrukturen, die aus sehr filigranen Elementen bestehen oder bei denen durch einen Anprall eines Lkws oder Schiffes ein Lager ausfallen kann, sind entweder als statisch unbestimmtes Tragwerk zu planen oder so auszuführen, dass ein Anprall keinen Lagerausfall zur Folge hat. Zu unterscheiden sind Systeme, die zwar insgesamt statisch bestimmt, von den Auflagern aber statisch unbestimmt sind, d.h. das System hat mehr als drei mögliche Lagerreaktionen. Hierbei führt bei geschickter Konstruktion das Versagen eines Elementes oder eines Auflagers nur zu einem Teilversagen und nicht zum gesamten Kollaps. In Abbildung 2.4 a ist ein solches System dargestellt. Die linken Auflager zusammen mit den angeschlossenen Stäben bilden einen Dreigelenkrahmen. Versagen Teile vom rechten angeschlossenen System, so bleibt der Dreigelenkrahmen stehen.

Statisch bestimmte Systeme haben dagegen den Vorteil, dass keine Zwangskräfte auftreten können. So hat der Lastfall Temperatur (gleichmäßig und ungleichmäßig)

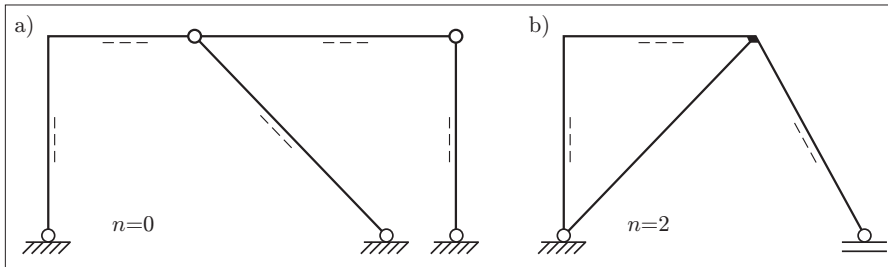


Abb. 2.4. a) Statisch bestimmtes System mit äußerer statischer Unbestimmtheit. b) Statisch unbestimmtes System, innerlich statisch unbestimmt, aber statisch bestimmt gelagert.

zwar eine Verformung des Tragwerks zur Folge, allerdings werden durch diesen Lastfall keinerlei Schnittkraftverläufe hervorgerufen. Bei eingepprägten Lagerverschiebungen weist ein solches Tragwerk das gleiche Verhalten auf. Setzungen am Baugrund haben am Tragwerk keine Schnittkraftverläufe zur Folge, siehe Abbildung 2.5. Ebenfalls von Vorteil ist, dass bei Herstellungsungenauigkeiten der einzelnen Tragelemente beim Zusammensetzen der Struktur keine Zwangskräfte entstehen. Durch die veränderte Geometrie müsste der Schnittkraftverlauf neu berechnet werden. In der Praxis werden solche Imperfektionen (Mängel) im Vorfeld bei der Bemessung berücksichtigt.

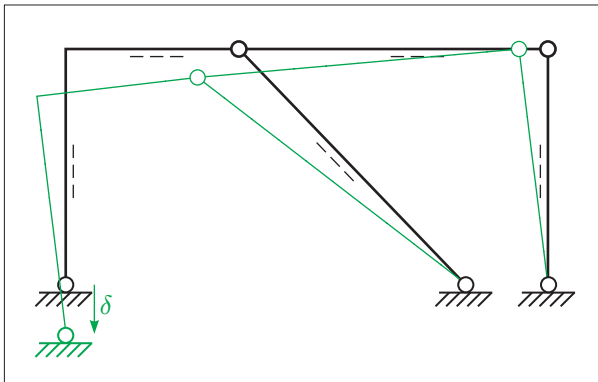


Abb. 2.5. Die eingepprägte Lagerverschiebung am linken Auflager hat für das statisch bestimmte System keinen Schnittkraftverlauf zur Folge.

Statisch unbestimmte Systeme

können in zwei Gruppen unterteilt werden: die allgemein statisch unbestimmte Systeme und Systeme, die nur innerlich statisch unbestimmt aber von den Lagerreaktionen statisch bestimmt sind. Das in Abbildung 2.4 b dargestellte System ist zweifach statisch unbestimmt, es ist aber mit drei möglichen Lagerreaktionen statisch

bestimmt gelagert. Der Vorteil einer solchen Lagerung ist, dass eingeprägte Lagerverschiebungen keinen Schnittkraftverlauf zur Folge haben, und somit sind solche Tragwerke unempfindlich gegenüber Baugrundbewegungen.

Ein Vorteil von statisch unbestimmten Systemen ist die größere Sicherheit gegen Versagen. Der Ausfall einzelner Bauelemente führt in der Regel nicht zum Totalversagen des Tragwerks, so dass bei gefährdeten Bauwerken statisch unbestimmt geplant werden sollte.

Bei einem statisch unbestimmten Tragwerk sollte immer berücksichtigt werden, dass z.B. Passungenauigkeiten einen Schnittkraftverlauf zur Folge haben. Das Gleiche gilt für den Lastfall Temperatur und Lastfall Lagerverschiebungen. Je steifer ein Bauwerk ausgeführt wird, desto bedeutender können die Schnittkraftverläufe infolge solcher Lastfälle werden. Daher sind solche Einwirkungen bei der Planung zu berücksichtigen, um die Bemessung des Tragwerks für alle auftretenden Einwirkungen durchzuführen.

2.1.4 Statisch bestimmtes Hauptsystem und Arbeitsgleichung

Mit dem gewählten Hilfszustand wird die Verformung gemessen, die von der Belastung auf dem statisch bestimmten Hauptsystem verursacht wird. Zudem wird die Verformung durch den Hilfszustand selbst ermittelt, und gegebenenfalls wird auch die Wechselwirkung verschiedener Hilfszustände untersucht. Als Ergebnis folgen die Verformungen $\delta_{i,k}$. Praktischer ist die Berechnung der EI -fachen Verformungen, weil so die Zahlenwerte nicht so viele Nachkommastellen aufweisen. Die Berechnung der δ_{ik} -Zahlen erfolgt gemäß der Arbeitsgleichung nach Betti:

$$\delta_{ik} = \int_0^l \frac{M_i M_k}{EI} dx.$$

Die Berechnung des Integralausdrucks von Hand ist fehlerträchtig. Deshalb sind in vielen Kompendien Integraltafeln abgedruckt, in denen die Ergebnisse integraler Überlagerungen von Funktionen in allgemeiner Form aufgeführt werden. Eine Integraltafel für die in der Baustatik üblichen Funktionsverläufe ist in Abbildung 2.6 abgedruckt. Der Wert des Integrals ergibt sich durch Auswertung des Tafelwertes für die markanten Werte der Funktionen und anschließende Multiplikation mit der Länge des betrachteten Abschnitts.

In Abbildung 2.7 ist ein statisch unbestimmter Durchlaufträger dargestellt. Das statisch bestimmte Hauptsystem unterscheidet sich vom statisch unbestimmten System durch eingefügte Gelenke und die hier frei geschnittenen Hilfskraftgrößen. Ziel ist die Einstellung der Hilfskräfte in der Form, dass die Verformungen aus Hilfszustand und Lastzustand vom Betrag her identisch aber entgegengerichtet sind. Nur dann wird die Verformungsbedingung eingehalten. Aus dem Lastspannungszustand folgt die Verformung am Gelenk zu

$$EI\delta_{10} = \int_0^l M_1 M_0 dx = 2l \frac{1}{3} \frac{pl^2}{8} = \frac{pl^3}{12}.$$

Aus dem Hilfszustand ergibt sich die Verformung am Gelenk zu

$$EI\delta_{11} = \int_0^l M_1^2 dx = 2l \frac{1}{3} l^2 = \frac{2}{3} l.$$

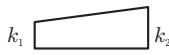
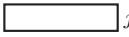
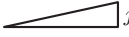
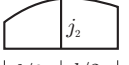
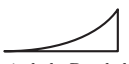
	k  k	 k	k_1  k_2
j  j	jk	$\frac{1}{2}jk$	$\frac{1}{2}j(k_1 + k_2)$
 j	$\frac{1}{2}jk$	$\frac{1}{3}jk$	$\frac{1}{6}j(k_1 + 2k_2)$
j 	$\frac{1}{2}jk$	$\frac{1}{6}jk$	$\frac{1}{6}j(2k_1 + k_2)$
j_1  j_2	$\frac{1}{2}k(j_1 + j_2)$	$\frac{1}{6}k(j_1 + 2j_2)$	$\frac{1}{6}[j_1(2k_1 + k_2) + j_2(k_1 + 2k_2)]$
j_1  j_3 allg. quadr. Parabel	$\frac{1}{6}k(j_1 + 4j_2 + j_3)$	$\frac{1}{6}k(2j_2 + j_3)$	$\frac{1}{6}[j_1k_1 + 2j_2(k_1 + k_2) + j_3k_2]$
 j rein kub. Parabel	$\frac{1}{4}jk$	$\frac{1}{5}jk$	$\frac{1}{20}j(k_1 + 4k_2)$
$\int_0^l M_j(x)M_k(x)dx = \text{Tafelwert} \times l$			

Abb. 2.6. Integraltafel für übliche Funktionen.

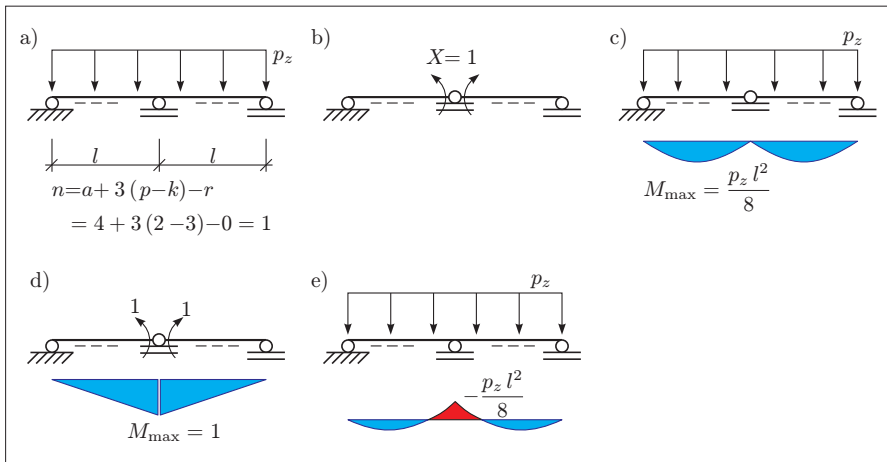


Abb. 2.7. Beispiel Zweifeldträger: a) System, b) Hauptsystem, c) Lastspannungszustand, d) Hilfszustand und e) Endzustand der Momentenfläche.

Damit am eingefügten Momentengelenk kein Knick entsteht, wird die Elastizitätsgleichung formuliert

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{10} &= 0 \\ \Rightarrow X_1 &= -\frac{\delta_{10}}{\delta_{1,1}} = -\frac{pL^2}{8}\end{aligned}$$

und man erhält für die Hilfsgröße X_1 den oben berechneten Wert für das Moment.

Die Hilfskraft X_1 wird also so eingestellt, dass die Verformung aus dem Hilfszustand X_1M_1 und dem Lastspannungszustand M_0 vom Betrag identisch, aber entgegengesetzt, ist.

Der Endverlauf der Biegemomente errechnet sich nun aus

$$M_{\text{end}} = M_0 + M_1X_1.$$

Die Berechnung der δ_{ik} -Zahlen ist nichts anders als die Berechnung von Relativverschiebungen und Relativverdrehungen infolge der unterschiedlichen Lastfälle am statisch bestimmten System. Die Unbekannten X_i werden in den Einsspannungszuständen zunächst mit Eins angenommen und dann über die Elastizitätsgleichung so eingestellt, dass die Verformungsbedingungen für das statisch unbestimmte System eingehalten sind, d.h. dass alle Relativverschiebungen und -verdrehungen Null sind. Die Werte für die X_i entsprechen dann gerade der Kraftgröße am statisch unbestimmten System, die als statisch Überzählige eingesetzt wurde.

2.1.5 Die vollständige Arbeitsgleichung

Bislang orientierte sich die Bestimmung der Verformungen an der Arbeitsgleichung nach Betti. Diese nutzt nur die Biegemomente, was sinnvoll ist, denn diese haben den größten Anteil an den Verformungen. Zudem sind die Biegemomente die geeignete Größe, um Arbeitsterme zu bestimmen, wie beispielsweise [12] und [16] gezeigt haben. Dennoch vernachlässigt diese Betrachtung die Wirkung von Querkraft, Torsion, Normalkraft und Federn sowie von Temperaturunterschieden. Um diese Einflussgrößen auch mit einzubeziehen, kann alternativ zur Betti'schen auch die vollständige Arbeitsgleichung verwendet werden.

Die einzelnen Terme werden in den entsprechenden Abschnitten zu Verformungen, Lastfällen und Federn beschrieben. Die vollständige Arbeitsgleichung lautet:

$$\begin{aligned}\delta_{ik} = & \underbrace{\int_0^l \frac{M_{iy}M_{ky}}{EI_y} dx}_{\text{Biegemomente um die } y\text{-Achse}} + \underbrace{\int_0^l \frac{M_{iz}M_{kz}}{EI_z} dx}_{\text{Biegemomente um die } z\text{-Achse}} + \underbrace{\int_0^l \frac{M_{iT}M_{kT}}{GI_T} dx}_{\text{Torsionsmomente um die } x\text{-Achse}} + \\ & + \underbrace{\int_0^l \kappa_{Qz} \frac{V_{iz}V_{kz}}{GA} dx}_{\text{Querkräfte in } z\text{-Richtung}} + \underbrace{\int_0^l \kappa_{Qy} \frac{V_{iy}V_{ky}}{GA} dx}_{\text{Querkräfte in } y\text{-Richtung}} + \underbrace{\int_0^l \frac{N_{ix}N_{kx}}{EA} dx}_{\text{Normalkräfte}} + \\ & + \underbrace{\int_0^l N_i\alpha_T T dx}_{\text{Gleichmäßige Temperatur}} + \underbrace{\int_0^l M_{iy}\alpha_T \frac{\Delta T_z}{h} dx}_{\text{Ungleichmäßige Temperatur in } z\text{-Richtung}} + \underbrace{\int_0^l M_{iz}\alpha_T \frac{\Delta T_y}{b} dx}_{\text{Ungleichmäßige Temperatur in } y\text{-Richtung}} +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\sum_n \frac{N_{in} N_{kn}}{c_{Nn}}}_{\text{Normalkraftfedern}} + \underbrace{\sum_m \frac{M_{im} M_{km}}{c_{Mm}}}_{\text{Biegemomentenfedern}} - \\
& - \underbrace{\sum_l C_{il} c_{kl}}_{\substack{\text{Eingeprägte} \\ \text{Lagerverschiebungen}}} - \underbrace{\sum_l C_{il} c_{kl}}_{\substack{\text{Eingeprägte} \\ \text{Widerlagerverdrehungen}}}
\end{aligned}$$

Die Erläuterungen zu den verwendeten Symbolen sind wie folgt:

i, k = Spannungszustände i, k	$\Delta T_z = T_u - T_o$ (Temperaturdifferenz)
E = Elastizitätsmodul	h = Balkenhöhe
G = Schubmodul	$\Delta T_y = T_v - T_h$ (Temperaturdifferenz)
I_y = Trägheitsm. um y -Achse	b = Balkenbreite
I_z = Trägheitsm. um z -Achse	c_N = Translationsfedersteifigkeit [in kN/m]
I_T = Torsionsträgheitsmoment	c_M = Rotationsfedersteifigkeit [in kNm]
A = Querschnittsfläche	C_{il} = Lagerkraft in Richtung c_{kl}
κ_Q = Schubflächenbeiwert	c_{kl} = Lagerverschiebung [in m]
α_T = Temperaturdehnungskoeff.	M_{iw} = Einspannmoment in Richtung φ_{kw}
T = Gleichm. Erwärmung [in K]	φ_{kw} = Lagerverdrehung

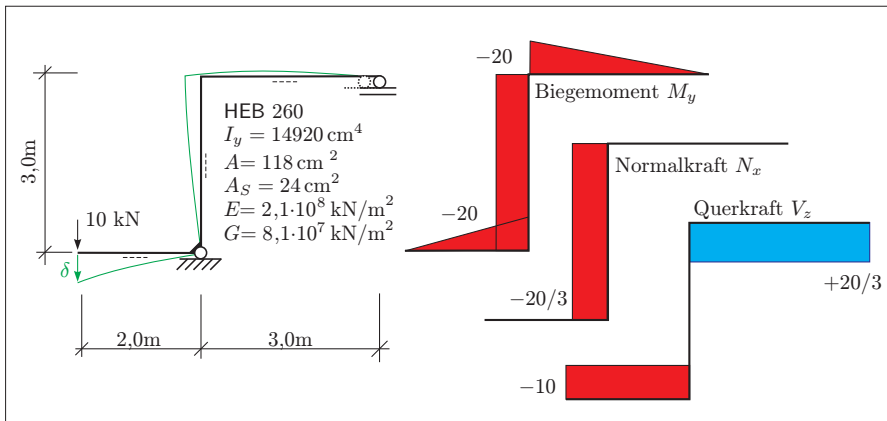


Abb. 2.8. Beispiel zur Arbeitsgleichung. Berechnung der Absenkung am linken Systemende.

Beispiel

Abbildung 2.8: Es soll gezeigt werden, aus welchen Anteilen sich die Verformung zusammensetzt. Um die vertikale Absenkung unter der Einzellast von $P = 10 \text{ kN}$ zu messen, wird an der gleichen Stelle eine Einzellast von 1 angeordnet. Die Werte für die zugehörigen Momente und Kräfte ergeben sich durch Division der Werte aus dem Lastfall P durch 10.

Absenkung aus Biegung:

$$\delta_M = \int_l \frac{M_{10} \cdot M_1}{EI} dx = \frac{1/3 \cdot (2+3)(-20)(-2) + 1 \cdot 3(-20)(-2)}{2,1 \cdot 10^8 \cdot 1,4920 \cdot 10^{-4}} = 5,96 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Absenkung aus Querkraft:

$$\delta_V = \int_l \frac{V_{10} \cdot V_1}{GA_s} dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot (-10)(-1) + 1 \cdot 3 \cdot (+20/3)(+2/3)}{8,1 \cdot 10^7 \cdot 0,0024} = 1,72 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Absenkung aus Normalkraft:

$$\delta_N = \int_l \frac{N_{10} \cdot N_1}{EA} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot (-20/3)(-2/3)}{2,1 \cdot 10^8 \cdot 0,0118} = 5,38 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

In der Summe ergibt sich

$$\delta = \delta_M + \delta_V + \delta_N = 5,96 + 0,172 + 0,005 = 6,14 \text{ mm}.$$

Zu Erkennen ist der relativ geringe Anteil der Schubverformungen. Bei Vollquerschnitten ist der Schubanteil an den Verformungen noch deutlich geringer, denn für Rechteckquerschnitte gilt $A/A_s \approx 1,2$, in diesem Fall (I-Profil) gilt jedoch $A/A_s = 4,9$. Die Verformungen aus Querkraft und Normalkraft sind im Vergleich zu denen aus Biegung gering und werden deshalb oft zu Recht vernachlässigt.

2.1.6 Federn

Jedes Tragwerk ist eine Feder. Denn ein Lastabtrag kann nur stattfinden, wenn Verformungen zugelassen werden. Die einfachsten Federn sind die Normalkraft- und die Drehfeder. Beide sind aus dem Alltag bekannt, die Normalkraftfeder beispielsweise aus der Fahrzeugfederung und die Drehfeder aus einer Taschenuhr.

In der Statik werden Federelemente betrachtet, die zur Modelloptimierung bei Rahmentragwerken verwendet werden. So können beispielsweise Rahmenecken dargestellt werden, die weder steif noch gelenkig sind. Im Gegensatz zu den Weggrößenverfahren, bei denen alle Tragwerksteile ohnehin als Federn mit mehreren Freiheitsgraden modelliert werden, wird beim Kraftgrößenverfahren zwischen Federn und sonstigen Tragwerkselementen unterschieden, zunächst jedenfalls. Es soll gezeigt werden, dass die Federwirkung von vornherein im Kraftgrößenverfahren enthalten ist.

Grundlage der Betrachtung ist das Federgesetz,

$$c \cdot u = f$$

wobei c die Federkonstante, u die Verformung und f die zugehörige Kraft ist. Die Arbeit, die eine Kraft bei der Federverformung leistet, ist $A = f \cdot u$. Und u ergibt sich gerade aus f/c .

Um die Systematik der Arbeitsgleichung ($\text{Arbeit} = \text{Kraft} \times \text{Weg}$) zu erfüllen, wird aus dem Hilfszustand die Normalkraft N_i mit dem Weg aus dem Lastzustand $N_j/c_T = u(N_j)$ multipliziert. Entsprechend gilt für Rotationsfedern $A = M_i M_j / c_R$.

Wird nun eine dimensionslose 1-Last für den Hilfszustand verwendet und nicht 1 kN, so ergibt sich im Ergebnis nicht eine Arbeit, sondern eine Verformung.

Die in den Federn eines Tragwerkes gespeicherte Arbeit wird aufsummiert. Die an der Feder wirkenden Kräfte sind die Normalkräfte aus den Last- und Hilfszuständen. Somit ist gewährleistet, dass die Feder entsprechend ihrer Einbindung in den Lastabtrag an den Verformungen beteiligt wird. Jede Feder hat zwei Enden. In der Überlagerung müssen immer die Kraftgrößen verwendet werden, die am selben Ende anliegen. Eine Feder kann eben immer nur einer Krafrichtung belastet werden, entweder wird die Feder zusammengedrückt oder auseinander gezogen. Gleiches gilt auch für eine Rotationsfeder.

Folgende Federterme sind in der Arbeitsgleichung enthalten:

$$\delta_{cN} = \sum_n \frac{N_{in} \cdot N_{kn}}{c_{Nn}}$$

$$\delta_{cM} = \sum_m \frac{M_{im} \cdot M_{km}}{c_{Mm}}.$$

Beispiel

Zu berechnen ist die Absenkung unter der Einzellast für das in Abbildung 2.9 dargestellte System. Die Arbeitsgleichung lautet in diesem Fall

$$\delta = M_{15} \cdot M_1 / c_R = \underbrace{\frac{(-60) \cdot (-4)}{20.000}}_{\text{Riegel}} = \underbrace{\frac{(60) \cdot (4)}{20.000}}_{\text{Stil}} = 0,012 \text{ m}.$$

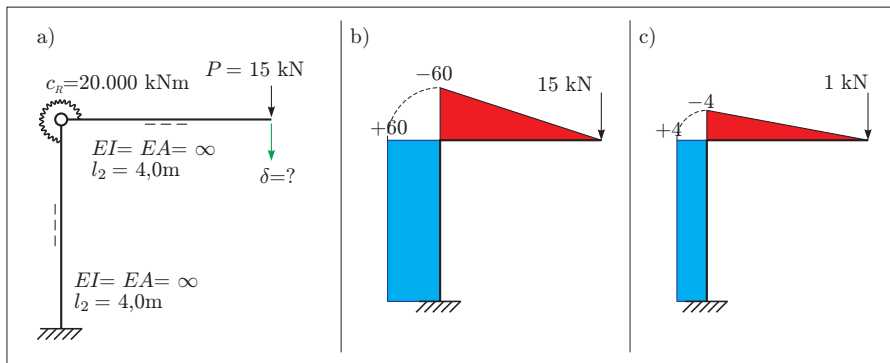


Abb. 2.9. Stabwerk mit Feder. a) System, b) Momente im Lastspannungszustand und c) Momente im Hilfszustand.

Hinweis

Die übrigen Terme der Arbeitsgleichung stellen prinzipiell auch Federterme dar. Die Steifigkeiten EA , EI , GA_S und GI_T entsprechen der Federkonstanten c . Die Kraftgrößen M , N und V müssen noch über die Stablänge integriert werden, weil die Schnittgrößen Funktionen über die Elementlänge sind. Danach entsprechen sie den an den Federn wirkenden Kräften.

2.1.7 Zusammenfassung

Das Kraftgrößenverfahren ermöglicht die Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Dazu sind sowohl Gleichgewichts- wie auch Verformungsbedingungen heranzuziehen. Es werden statisch überzählige Kräfte frei geschnitten, so dass weitere Gleichgewichtsbedingungen entstehen. Diese Kräfte werden so skaliert, dass sie den Verformungsbedingungen genügen. Dies wird über die Elastizitätsgleichung gewährleistet. Für ein n -fach statisch unbestimmtes System ergibt sich die i -te Elastizitätsgleichung in der Form:

$$\delta_{i0} + \sum_k^n X_k \delta_{ik} = 0 \quad \text{mit} \quad i, k = 1 \dots n.$$

Der Endverlauf der Kraftgrößen K (Momente, Auflager, etc.) ergibt sich zu

$$K_{\text{end}} = K_0 + \sum_{i=1}^n X_i K_i.$$

Die Berechnung erfolgt im Allgemeinen unter Betrachtung der Biegemomente aus Last- und Hilfszuständen. Zudem wird der Einfachheit wegen mit einer konstanten Steifigkeit EI für das gesamte Tragwerk gerechnet und die Schubanteile werden vernachlässigt. Für die Berechnung realer Tragwerke sollte im Fall der statischen Unbestimmtheit aber mit den vorhandenen Steifigkeiten gerechnet werden, und je nach Trägertyp auch mit Schub- und Torsionsanteilen.

2.2 Veränderliche Streckenlast

2.2.1 Wenn Einzellasten nicht ausreichen...

Einzellasten werden gerne verwendet, weil ihr rechentechnisches Handling einfach ist. Allerdings bilden sie die Belastungen auch nur eingeschränkt ab.

Oft muss deshalb mit verteilten Lasten gerechnet werden. Verteilte Lasten stellen bei der Handrechnung immer dann ein Problem dar, wenn die Überlagerung der Momentenflächen erfolgen soll, denn in den Integraltafeln sind hierfür keine Überlagerungskombinationen enthalten. In diesem kurzen Abschnitt soll deshalb die Vorgehensweise bei Vorliegen von veränderlichen Streckenlasten erklärt werden.

2.2.2 Grundlagen

Die veränderliche Last wird in der Regel als Polynom dargestellt. Zwischen den Schnittgrößen gelten die Beziehungen $dM/dx = V(x)$ und $dV/dx = -q(x)$. Ist die Funktion $q(x)$ bekannt, so muss diese unter Berücksichtigung der Randbedingungen zweimal integriert werden, um die Momentenfunktion zu erhalten. Ist $q(x)$ ein Polynom ersten Grades oder höher, so ist die Momentenfunktion mindestens kubisch. Zudem ergeben sich, abhängig von den Randbedingungen, quadratische, lineare und konstante Terme. Im Rahmen der Überlagerung sind diese einzeln mit den Momentenflächen aus den Hilfszuständen zu behandeln.

2.2.3 Anwendung

Die Vorgehensweise soll an einem Beispiel (siehe Abbildung 2.10) kurz dargestellt werden. Die Resultierende der Streckenlast ist R und es gilt

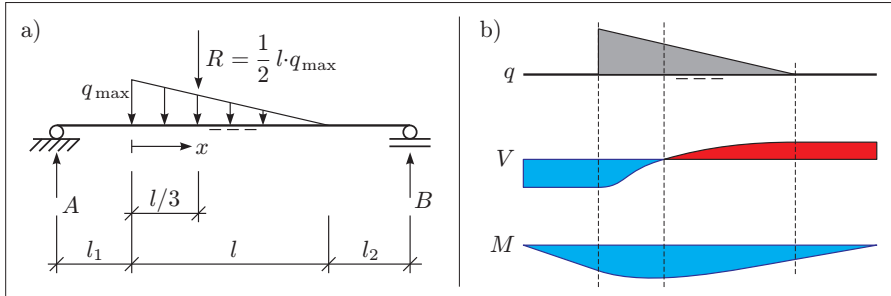


Abb. 2.10. Beispiel eines Trägers mit veränderlicher Streckenlast. a) System und b) qualitative Schnittgrößenverläufe.

$$R = \frac{1}{2} \cdot q_{\max} \cdot l.$$

Zunächst werden die Lagerreaktionen bestimmt:

$$A = R \cdot \frac{\frac{2}{3}l + l_2}{l_1 + l + l_2}$$

$$B = R \cdot \frac{\frac{1}{3}l + l_1}{l_1 + l + l_2}.$$

Hiermit können die Randmomente an den Stellen $x = 0$ und $x = l$ bestimmt werden zu

$$M(x=0) = A \cdot l_1$$

$$M(x=l) = B \cdot l_2.$$

Zudem gilt für die Querkraft:

$$V(x=0) = A \quad \text{und}$$

$$V(x=l) = -B.$$

Die Streckenlast wird definiert über

$$q(x) = q_{\max} \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

Die Integration liefert zunächst die Querkraft mit

$$\begin{aligned}
V(x) &= \int_0^l -q(x) dx \\
&= q_{\max} \int_0^l \frac{x}{l} - 1 dx \\
&= q_{\max} \left[\frac{1}{2l} x^2 - x \right]_0^l + V(x=0) \\
V(x) &= q_{\max} \left(\frac{1}{2l} x^2 - x \right) + A.
\end{aligned}$$

Die zweite Integration liefert nun

$$\begin{aligned}
M(x) &= \int V(x) dx \\
&= \int q_{\max} \left(\frac{1}{2l} x^2 - x \right) + V(x=0) dx \\
M(x) &= q_{\max} \left(\frac{1}{6l} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right) + V(x=0) \cdot x + M(x=0).
\end{aligned}$$

Werden die Terme für A und $M(x=0)$ eingesetzt, so ergibt sich für dieses Beispiel die allgemeine Gleichung

$$M(x) = q_{\max} \cdot \left\{ \frac{1}{6l} x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \left(l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}l + l_2}{l_1 + l + l_2} \right) \cdot (x + l_1) \right\}.$$

Mit $l_1 = l_2 = 0$, $l = 6$ und $q_{\max} = 10$ folgt nun beispielsweise

$$M(x) = \frac{5}{18} x^3 - 5x^2 + 20x.$$

Überlagerung des Momentenverlaufs

Ist ein solcher Momentenverlauf mit einem allgemein linearen Verlauf z.B. aus den Einszuständen zu überlagern, so erfolgt dies durch die Zerlegung des allgemein kubischen Verlaufes in die reinen Anteile. Die Vorgehensweise für die Überlagerung einer allgemein kubischen mit einer allgemein linearen Funktion ist im Folgenden symbolisch dargestellt.

$$\begin{aligned}
&\int_0^l (c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4)(c_5 x + c_6) dx = \\
&= \int_0^l \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \cdot \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} dx + \int_0^l \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \cdot \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} dx + \int_0^l \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \cdot \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} dx + \int_0^l \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \cdot \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} dx
\end{aligned}$$

Die kubische Funktion wird in die kubischen, quadratischen, linearen und konstanten Anteile zerlegt und einzeln mit der zweiten Funktion überlagert.

2.3 Lastfall Temperatur

Der Lastfall Temperatur ist vor allem für statisch unbestimmte Tragwerke beachtlich, denn diese erfahren hierdurch mitunter erhebliche Zusatzspannungen, weil die

Bauteile beispielsweise zwischen den Lagern eingezwängt sind. So ist für die Bemessung von Behältern, bei denen oft große Temperaturgradienten von Außenluft zu Füllung vorhanden sind, der Lastfall Temperatur oft maßgeblich.

Die Herleitung soll der Einfachheit wegen am eingespannten Stab erfolgen. In Abbildung 2.11 ist ein Stab unter Temperaturlast (= Temperaturänderung gegenüber dem Einbauzustand) dargestellt. Wäre der Stab nicht fixiert, so würde sich durch die Temperatureinwirkungen das Element kräftefrei verformen können. Durch die Lagerung wirkt im Stab so jedoch die Kraft, die notwendig ist, um den Stab auf Ausgangslänge zu fixieren. Die Verformungsbedingung führt auf die schon bekannte Elastizitätsgleichung

$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0.$$

Der Hilfszustand (Index 1) liefert die Kräfte, der Lastzustand (Index 0) liefert die Temperaturen. In der Arbeitsgleichung werden drei Terme berücksichtigt

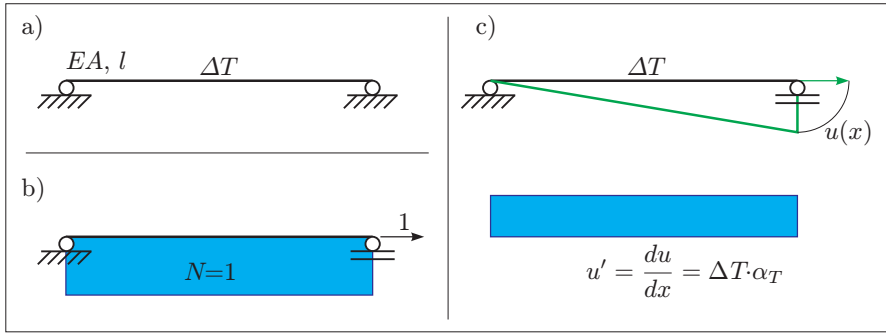


Abb. 2.11. a) Stab unter Temperaturlast, b) Hilfssystem und c) Lastspannungszustand.

$$\begin{aligned}\delta_N &= \int N_i \cdot \alpha_T \cdot T \, dx \\ \delta_{My} &= \int M_{iy} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T_z}{h} \, dx \\ \delta_{Mz} &= \int M_{iz} \cdot \alpha_T \cdot \frac{\Delta T_y}{b} \, dx.\end{aligned}$$

Ein Integral der Arbeitsgleichung liefert stets eine Arbeit (Skalar), *Arbeit* = *Kraft* $\times$ *Weg*. Wenn eine Hilfskraft von 1 und nicht 1 kN verwendet wird, so liefert das Integral nicht die geleistete Arbeit, sondern den zurückgelegten Weg. Bei der Überlagerung von Kraftgrößen beispielsweise ergibt sich:

$$\int \frac{N_i N_j}{EA} \, dx = \int \frac{[\text{kN}] \cdot [\text{kN}]}{[\text{kN}/\text{m}^2] \cdot \text{m}^2} \, dx = \int \frac{[\text{N}]}{[1]} \, dx = [\text{N} \cdot \text{m}].$$

Die Arbeitsterme aus Temperaturlasten lassen eine vergleichbare Struktur erkennen. So gilt beispielsweise für die gleichmäßige Erwärmung

$$\int N_i \cdot \alpha_T \cdot T \, dx = \int [\text{kN}] \cdot [1/\text{K}] \cdot [\text{K}] \, dx = \int [\text{kN}] \cdot [1] \, dx = [\text{kN} \cdot \text{m}].$$

In beiden Termen stellt N_i die Kraftgröße aus einem Hilfszustand dar. Die Integrale $\int N_j/(EA) \, dx$ und $\int \alpha_T \cdot T \, dx$ liefern die notwendige Weggröße.

Für die Berücksichtigung einer ungleichmäßigen Erwärmung werden die Überlagerungsterme für Biegung unter Verwendung der Momente $M_{y,j}$ beziehungsweise $M_{z,j}$ aus dem Hilfszustand benutzt.

2.4 Verformungen

2.4.1 Arten der Verformung

Verformungen spielen bei der Berechnung von Tragwerken eine besondere Rolle, wenn die Gebrauchstauglichkeit betrachtet wird. Zu unterscheiden sind

- Einzelpunktverschiebungen aus Belastungen, die über die Arbeitsgleichung bestimmt werden,
- Verformungsfiguren aus Belastungen, die aus Biegelinien zusammengesetzt und aus den Momentenflächen und Einzelpunktverschiebungen abgeleitet werden und
- Eingeprägte Verschiebungen.

2.4.2 Einzelpunktverschiebungen

Standardfälle

Die Bestimmung von Einzelpunktverschiebungen ist bereits bei der Einführung in das Kraftgrößenverfahren erklärt worden. An der zu betrachtenden Stelle wird eine 1-Kraft in der zu untersuchenden Richtung angetragen. Durch Überlagerung mit den Momenten aus der Systembelastung ergibt sich gemäß der Arbeitsgleichung die Verformungsgröße.

Als Beispiel sind in Abbildung 2.12 a eine Verschiebung, in Abbildung 2.12 b und c zwei Verdrehungen und in Abbildung 2.12 d eine Relativverdrehung dargestellt. Relativbewegungen können übrigens, wie im Beispiel gezeigt, nur an Gelenken auftreten.

Die Verformungen ergeben sich wie folgt:

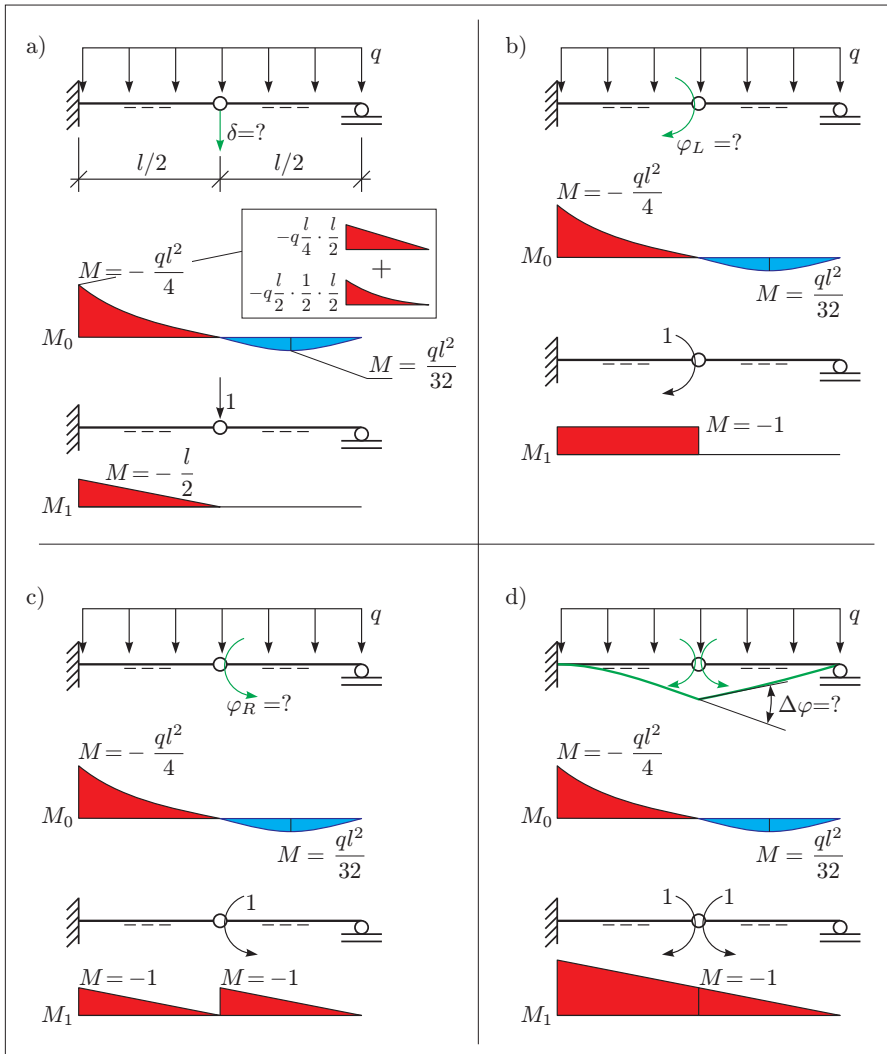


Abb. 2.12. Einzelpunktverformungen: a) Vertikale Absenkung, b) Verdrehung des linken Gelenkanschlusses, c) Verdrehung des rechten Gelenkanschlusses und d) Relativverdrehung am Gelenk.

$$\begin{aligned}
EI \cdot \delta &= \underbrace{\frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{-ql^2}{4} \cdot \frac{-l}{2}}_{\text{linear}} + \underbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{-ql^2}{8} \cdot \frac{-l}{2}}_{\text{quadratisch}} \\
&= 0,0286 \, ql^4 \\
EI \cdot \varphi_L &= \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{-ql^2}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{-ql^2}{8} \cdot (-1) \\
&= 0,0833 \, ql^3 \\
EI \cdot \varphi_R &= \frac{1}{3} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{-ql^2}{4} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{-ql^2}{8} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{32} \cdot (-1) \\
&= 0,0534 \, ql^3 \\
EI \cdot \Delta\varphi &= \frac{1}{6} \cdot \frac{l}{2} \cdot (2 \cdot 2 + 1) \cdot \frac{-ql^2}{4} + \frac{1}{12} \cdot \frac{l}{2} \cdot (3 \cdot 2 + 1) \cdot \frac{-ql^2}{8} \\
&\quad + \frac{1}{4} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{ql^2}{32} \cdot (-1) = 0,137 \, ql^3.
\end{aligned}$$

Vollständige Verformung

Bei Rahmentragwerken (siehe Abbildung 2.13) kann es vorkommen, dass die vertikale oder horizontale Verformung alleine nicht aussagekräftig sind. Vielmehr muss hier die resultierende Gesamtverschiebung ermittelt werden.

Die Verformungen ergeben sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
EI \cdot \delta_v &= \int M_0 M_{1,v} dx = \frac{1}{3}(-40) \cdot (-2) \cdot 2 + 1 \cdot (-40) \cdot (-2) \cdot 5 = 453,33 \\
EI \cdot \delta_h &= \int M_0 M_{1,h} dx = \frac{1}{2}(-40) \cdot (-5) \cdot 5 = 500,00 \\
EI \cdot \delta &= \sqrt{EI^2 \cdot \delta_v^2 + EI^2 \cdot \delta_h^2} = \sqrt{453,33^2 + 500^2} = 674,92 \\
&\Rightarrow \delta = 0,034 \, \text{m}.
\end{aligned}$$

2.4.3 Das ω -Verfahren

Hier soll nur sehr kurz die Vorgehensweise bei Anwendung des ω -Verfahrens zur Ermittlung von Biegelinien und Verschiebungsfiguren aufgeführt werden, denn eigentlich ist es ein etwas veraltetes Verfahren:

- Berechnung der Knotenverschiebungen an kritischen Punkten über den Arbeitssatz. Dies ist der lineare Anteil der Verschiebungsfigur und liefert einen Polygonzug.
- Berechnung der Felddeformationen über die zweifache Integration der Momentenverläufe. Die Berechnung wird für gelagerte Balken durchgeführt. Dies ist der gekrümmte Anteil der Verformungsfigur.
- Die Addition beider Verschiebungsanteile liefert die endgültige Verformungsfigur.

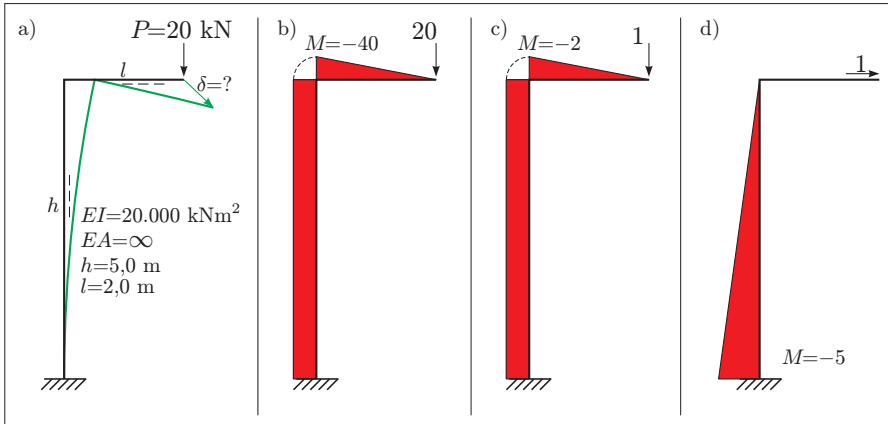


Abb. 2.13. Vollständige Einzelpunktverformungen setzen sich (in der Ebene) aus beiden Verformungskomponenten zusammen. a) System, b) Momente aus Last, c) Momente aus vertikaler 1-Kraft und d) Momente aus horizontaler 1-Kraft.

2.4.4 Eingeprägte Verschiebungen

Eingeprägte Verschiebungen treten in zwei Formen auf:

- Lagerabsenkungen. Sie haben in Bezug auf Zusatzspannungen nur auf statisch unbestimmte Tragwerke einen Einfluss, denn hier rufen diese Verformungen Zwangskräfte hervor. Bei statisch bestimmten Systemen sind dahingegen Starrkörperbewegungen möglich, die kräftefrei vollzogen werden.
- Punktverformungen. Sie rufen immer Belastungen im Tragwerk hervor.

Lagerabsenkungen

Lagerabsenkungen werden über die Arbeitsgleichung erfasst. Die Arbeitsterme gehen mit negativem Vorzeichen in die Bilanz ein. Mit den Lagerkräften C an den Stellen l in den Lastfällen i, k und den entsprechenden Verschiebungen c aus dem Lastspannungszustand gilt

$$\delta_\delta = - \sum C_{il} \cdot c_{kl}.$$

Für Einspannmomente gilt entsprechend

$$\delta_\varphi = - \sum M_{iw} \cdot \varphi_{kw}.$$

Die Vorzeichenregelung soll am Beispiel erklärt werden. Es wird ein Einfeldträger unter konstanter Streckenlast q betrachtet (siehe Abbildung 2.14). Zusätzlich erfährt das Lager B eine Absenkung um δ . Gemessen werden soll die Absenkung in Feldmitte. Für den Lastfall ($q \neq 0, \delta = 0$) ergibt sich die Verformung (aus [25]) zu $w(l/2, q) = \frac{ql^4}{76,8EI}$. Die vertikal nach unten gerichtete Testkraft in Feldmitte liefert eine nach oben gerichtete Lagerreaktion von $1/2$. Infolge der Lagerabsenkung wird negative Arbeit geleistet ($-1/2 \cdot \delta$). Durch das negative Vorzeichen des Terms in

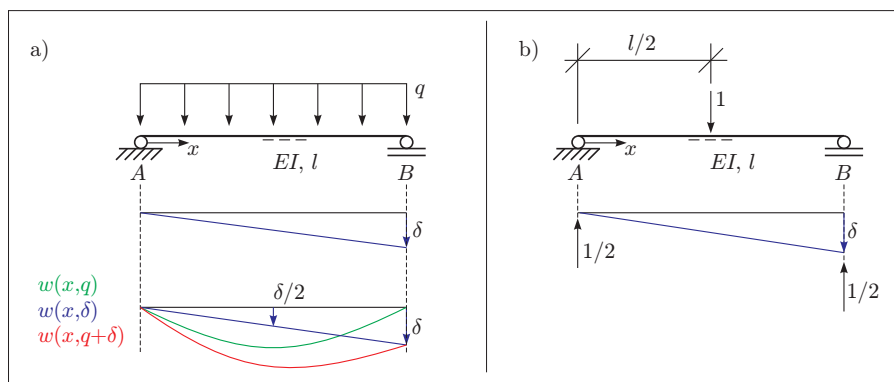


Abb. 2.14. Lagerabsenkungen. a) System mit Belastung und b) Hilfszustand.

der Arbeitsgleichung wird die Richtung für die Auswertung der Verformung wieder korrigiert. Das Vorzeichen muss deshalb geändert werden, weil nicht die Messgröße selbst (1-Kraft) in die Betrachtung eingeht, sondern die Reaktion des Systems hierauf, aber die Verformung aus dem eigentlichen Lastfall direkt übernommen wird. Die Gesamtverformung ist damit

$$w(l/2, q + \delta) = \frac{ql^4}{76,8 EI} - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \delta = \frac{ql^4}{76,8 EI} + \frac{\delta}{2}.$$

Punktverschiebungen

Im Kraftgrößenverfahren können nicht direkt Wege δ_{soll} als Belastung aufgebracht werden. Deshalb wird eine skalierbare Kraft aufgebracht. Die Vorgehensweise ist wie folgt:

- 1-Last dort aufbringen, wo eine Verformung aufgebracht werden soll.
- Momentenflächen berechnen.
- Verschiebung δ_{ist} unter 1-Last auswerten (Überlagerung der Momente mit sich selbst).
- 1-Last mit $\delta_{\text{soll}}/\delta_{\text{ist}}$ multiplizieren.
- Momentenfläche aus 1-Last mit $\delta_{\text{soll}}/\delta_{\text{ist}}$ multiplizieren.

Dieses Verfahren wird in der Statik bei der Berechnung von Einflusslinien für statisch unbestimmte Systeme angewandt, wenn der negative Skalierungsfaktor bestimmt wird.

Die Vorgehensweise soll im Beispiel (Abbildung 2.15) gezeigt werden. Aus der 1-Last resultiert der dargestellte Momentenverlauf. Die Überlagerung liefert

$$\delta_{\text{ist}} = \frac{1}{3} \cdot 5 \cdot \frac{(-5)^2}{20.000} = 2,083 \cdot 10^{-3} \text{ m}.$$

Das Verhältnis von Sollabsenkung und der Absenkung aus der 1-Last ist

$$\frac{\delta_{\text{soll}}}{\delta_{\text{ist}}} = \frac{0,01 \text{ m}}{2,083 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 4,8.$$

Damit muss die 1-Last mit dem Faktor 4,8 multipliziert werden, um die Verformung $\delta = 0,01 \text{ m}$ zu erreichen. Das Einspannmoment wird auf -24 kNm skaliert.

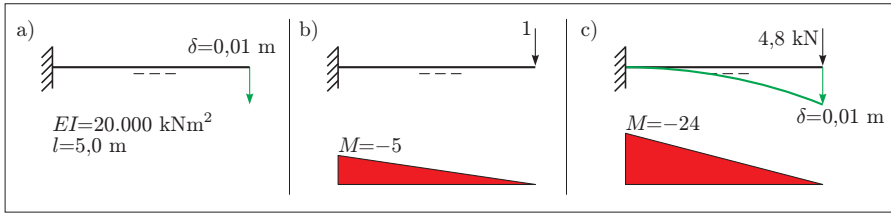


Abb. 2.15. Verformung als Belastung aufbringen. a) System, b) Momente aus 1-Last und c) skaliertes System.

2.5 Orthogonalität von Spannungszuständen

2.5.1 Herleitung

Grundlage des Kraftgrößenverfahrens ist die Arbeitsgleichung. Die Bilanzierung von innerer und äußerer Arbeit geschieht mittels Überlagerung verschiedener Lastzustände. Wird nun ein Hilfszustand mit dem Endzustand überlagert, so ist die geleistete Arbeit gerade Null – aber wieso?

Über die Elastizitätsgleichung werden die Hilfszustände so skaliert, dass sie die Verformungsbedingungen des Systems erfüllen. Aus der Addition der skalierten Hilfszustände und dem Lastzustand ergibt sich der Endzustand der Schnittkraftflächen und Lagerreaktionen. Wird nun der Endzustand mit einem Hilfszustand überlagert, so geschehen zwei Prozesse:

- Der Lastzustand wird mit dem Hilfszustand überlagert.
- Der skalierte Hilfszustand wird mit dem nicht skalierten Hilfszustand überlagert.

Nun ist der Skalierungsfaktor gerade die Wechselwirkung von Last- und Hilfszustand. Weil dieser zur Modifikation des Hilfszustandes negativ angesetzt wird, ergibt die Summe bei der Überlagerung gerade Null. In Kurzform (EI sei der Einfachheit wegen 1):

$$\text{Verformungsbedingung: } X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

$$\text{Superposition: } M_{\text{end}} = M_0 + X_1 M_1 = M_0 - M_1 \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}.$$

Die Überlagerung eines Hilfszustandes mit dem Endzustand liefert dann

$$\begin{aligned} \delta &= A = \int_0^l M_{\text{end}} M_1 dx \\ &= \int_0^l (M_0 - M_1 \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}) M_1 dx \\ &= \int_0^l M_0 M_1 dx - \int_0^l M_1 M_1 \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} dx \\ &= \delta_{10} - \delta_{11} \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = 0. \end{aligned}$$

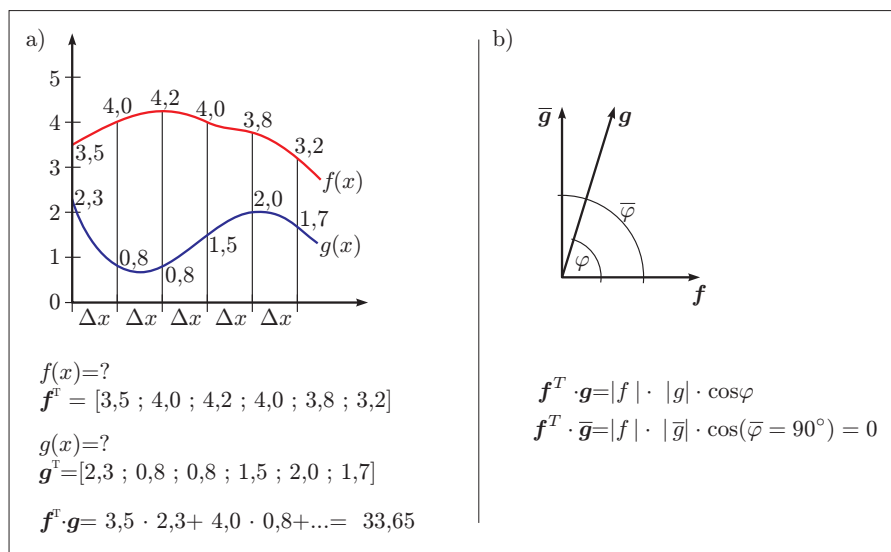


Abb. 2.16. a) Zwei Funktionen und Vektorisierung und b) Skalarprodukt von Vektoren.

Zwei Funktionen (siehe Abbildung 2.16) lassen sich über ihre Funktionsterme $f(x) = \dots$ und $g(x) = \dots$ eindeutig beschreiben. Jede Funktion kann aber auch über eine Koordinatenbeschreibung definiert werden. Wird ein einheitlicher Abszissenabstand vorgegeben, so ist über einen Vektor, in dem die Ordinaten eingetragen werden, die Beschreibung des Funktionsverlaufs recht gut möglich. Werden nun zwei vektoriell beschriebene Funktionen überlagert, ergibt sich das Skalarprodukt. Zwei Vektoren werden *orthogonal* genannt, wenn ihr Skalarprodukt gerade Null ist. Die Überlagerung von End- und Hilfszuständen muss im Ergebnis Null liefern. Die vektorielle Sichtweise liefert hierfür den Begriff: Orthogonalitätsbedingung. Sie hat zur Folge, dass die Arbeiten, die bei einer solchen Überlagerung geleistet werden, in der Summe gerade Null sind. Doch warum ist die Arbeit bei der Überlagerung von jedem Hilfszustand mit dem Endzustand gerade Null?

Antwort: Weil...

- ...das statisch bestimmte Hauptsystem an seinen Lagern die Verformungsbedingungen des Ausgangssystems einhält und
- ...die Hilfszustände so skaliert werden, dass im Zusammenwirken der Hilfszustände nach der additiven Zusammensetzung der Momentenflächen ebenfalls die Verformungsbedingungen einhalten werden.

Bei der Überlagerung ergibt sich analog zum einfach statisch unbestimmten Fall die Wechselwirkung zu Null. Für höhergradig statisch unbestimmte Systeme werden die Gleichungen als lineares Gleichungssystem in der Form

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

geschrieben. Dabei bedeutet im einzelnen

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= [\delta_{ik}] \\ \mathbf{x} &= [X_i] \\ \mathbf{b} &= [-\delta_{i0}].\end{aligned}$$

Die Lösung des Gleichungssystems lässt sich über die Bestimmung der Inversen berechnen:

$$\mathbf{x} = [X_i] = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}.$$

Im Folgenden wird die Indexschreibweise gewählt. Für den Endmomentenverlauf M_{end} gilt

$$M_{\text{end}} = M_0 + M_k^T \cdot X_k = M_0 - M_k^T \cdot \delta_{ik}^{-1} \cdot \delta_{i0}.$$

Die Überlagerung eines beliebigen, aber fest gewählten Hilfszustandes M_j mit dem Endzustand ergibt nun

$$\begin{aligned}\int_0^l M_{\text{end}} M_j dx &= \int_0^l (M_0 - M_k^T \delta_{ik}^{-1} \delta_{i0}) M_j dx \\ &= \int_0^l M_0 M_j dx - \int_0^l M_k^T \delta_{ik}^{-1} \delta_{i0} M_j dx \\ &= \delta_{j0} - \int_0^l M_k^T (M_i M_k^T)^{-1} \delta_{i0} M_j dx \\ &= \delta_{j0} - \int_0^l M_k^T M_k^{-T} M_i^{-1} M_i M_0 M_j dx \\ &= \delta_{j0} - \int_0^l M_0 M_j dx = \delta_{j0} - \delta_{j0} = 0.\end{aligned}$$

2.5.2 Beispiel

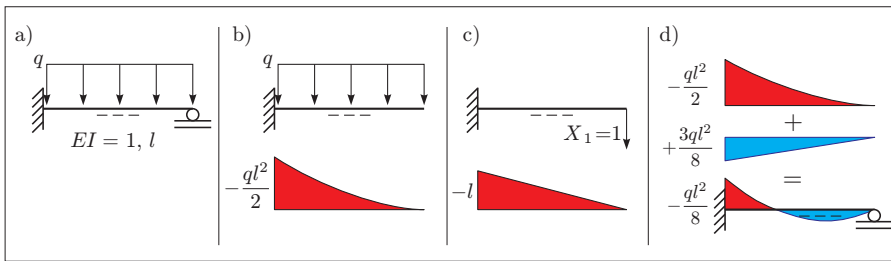


Abb. 2.17. Beispiel zur Orthogonalität von Lastzuständen: a) System, b) Lastzustand, c) Hilfszustand und d) Additive Überlagerung.

Es ergeben sich folgende Überlagerungszahlen für das in Abbildung 2.17 dargestellte Beispiel:

$$\delta_{10} = l \cdot \frac{1}{4} \cdot (-l) \left(-q \cdot \frac{l^2}{2} \right) = \frac{ql^4}{8}$$

$$\delta_{11} = l \cdot \frac{1}{3} \cdot (-l)(-l) = \frac{l^3}{3}.$$

Die Elastizitätsgleichung liefert

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{3ql}{8}.$$

Die skalierte Hilfsfunktion bekommt einen Momentenmaximalwert von

$$M_e = \frac{3ql^2}{8}.$$

Der Endmomentenverlauf setzt sich aus den beiden Teilverläufen (Dreieck und Parabel) zusammen. Wird dieser nun mit dem Hilfszustand wieder überlagert, so folgt:

$$\delta = \underbrace{l \cdot \frac{1}{4} \cdot (-l) \left(-\frac{ql^2}{2} \right)}_{\text{Parabel}} + \underbrace{l \cdot \frac{1}{3} \cdot (-l) \left(\frac{3ql^2}{8} \right)}_{\text{Dreieck}} = \frac{ql^4}{8} - \frac{ql^4}{8} = 0.$$

2.5.3 Reduktionssatz

Für die Berechnung von Weggrößen mit dem Kraftgrößenverfahren stellt der Reduktionssatz eine wesentliche Erleichterung dar. In Worten ausgedrückt lautet der Reduktionssatz:

”Zur Berechnung von Einzelverformungen an statisch unbestimmten Tragwerken braucht nur einer der beiden Kraftgrößenzustände eines Formänderungsintegrals am statisch unbestimmten Tragwerk ermittelt werden; der andere kann einem beliebigen, aus dem Originalsystem entwickelten, statisch bestimmten Hauptsystem entstammen.”

Der Beweis des Reduktionssatzes ist mit der Kenntnis der Orthogonalitätsbedingung leicht zu führen.

Es seien M_{end} und M_δ zwei an dem gleichen statisch unbestimmten Tragwerk berechnete Momentenverläufe. Dabei ist M_{end} der aus der Systembelastung resultierende Momentenverlauf und M_δ ein durch eine Eins-Kraft hervorgerufener Momentenverlauf. Die Verschiebung an der Stelle der Eins-Kraft berechnet sich über das Formänderungsintegral

$$\delta = \int_0^l \frac{M_{\text{end}} M_\delta}{EI} dx.$$

Der Endmomentenverlauf berechnet sich allgemein über

$$M_{\text{end}} = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 + \cdots + X_n M_n$$

$$= M_0 + \sum_{i=1}^n X_i M_i.$$

Setzt man die Gleichung des Endmomentenverlaufes in das Formänderungsintegral ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\delta &= \int_0^l \frac{M_{\text{end}}}{EI} \left(M_0^\delta + \sum_{i=1}^n X_i^\delta M_i^\delta \right) dx \\ &= \int_0^l \frac{M_{\text{end}} M_0^\delta}{EI} dx + \underbrace{\sum_{i=1}^n \left\{ X_i^\delta \int_0^l M_{\text{end}} M_i^\delta dx \right\}}_{=0}.\end{aligned}$$

Der letzte Integralausdruck ist aufgrund der Orthogonalitätsbedingung identisch Null. Es verbleibt lediglich die Überlagerung des Endmomentenverlaufes mit dem Lastzustand (Eins-Belastung) am statisch bestimmten System.

2.6 Raumtragwerke

2.6.1 Projektion

Räumliche Tragwerke werden von Anfängern im Statikgeschäft gerne gemieden, weil sie Vorstellungsvermögen und Abstraktionsfähigkeit am stärksten fordern, gerade wenn es um die Berechnung von Hand geht. Dabei ist es eigentlich ganz einfach: Bei der Handrechnung werden die räumlichen Systeme in Ebenen projiziert, auf denen das Tragwerk als ebenes Problem behandelt wird. Bei Hallengerüsten oder Stockwerksrahmen funktioniert diese Herangehensweise sehr gut, bei Konstruktionen, die keinem Raster unterworfen sind, eher nicht.

2.6.2 Vorzeichendefinition

Die Bestimmung der Vorzeichen sollte gemäß dem Schnittprinzip erfolgen. Vor allem bei den Torsionsmomenten besteht keine andere Möglichkeit der Feststellung. Hier muss das Momentengleichgewicht am frei geschnittenen System hergestellt und die Gleichung nach M_T aufgelöst werden.

Für die Biegemomente ergibt sich neben dem Schnittprinzip und somit der rechnerischen eine zweite mehr anschauliche Möglichkeit der Vorzeichenfindung. Hierzu muss die Verformung skizziert werden (vergleiche Abbildung 2.18). Durch die Verbiegung des Tragwerkes entsteht auf einer Seite des jeweiligen Elements Zug. Auf dieser Seite wird die Momentenfläche angetragen. Das Vorzeichen ergibt sich nun aus dem Koordinatensystem, siehe hierzu Tabelle 2.1.

Tabelle 2.1. Vorzeichen der Momente und Antragsrichtung.

Koordinaten z	Biegemoment M_y	Koordinaten y	Biegemoment M_z
positiv	positiv	negativ	positiv
negativ	negativ	positiv	negativ

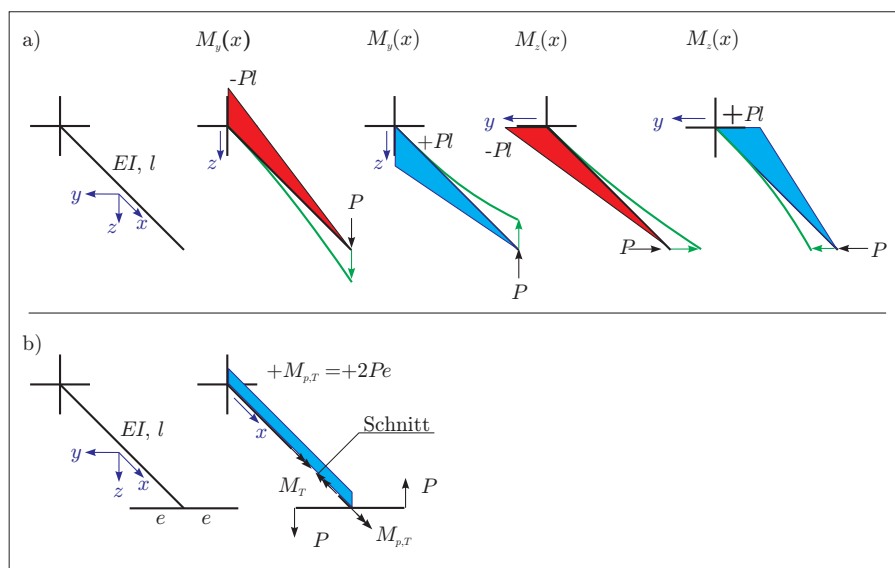


Abb. 2.18. Räumlicher Kragarm, a) Biegemomente und b) Torsion.

2.6.3 Lösungsstrategie

Die Strategie zur Behandlung der räumlichen Tragwerke ist dieselbe wie bei ebenen Systemen.

Der Grad der statischen Unbestimmtheit kann über das Abzählkriterium mit dem Grad der statischen Unbestimmtheit n , der Lageranzahl a , der Stabanzahl p , der Knotenanzahl k und der Gelenkanzahl r zu

$$n = a + 6(p - k) - r$$

ermittelt werden. Einfacher ist jedoch das Entfernen von Lagerreaktionen und/oder Pendelstäben, weil hierdurch immer nur eine Kraft eliminiert wird, siehe Kapitel 2.1.2. Das System ist dann statisch bestimmt, wenn es in den drei Projektionen jeweils ein statisch bestimmtes System bildet.

Für das statisch bestimmte Hauptsystem und die Hilfszustände müssen die Lagerreaktionen bestimmt werden. Hierzu sind gegebenenfalls Projektionen zu betrachten. Die Schnittgrößenermittlung reduziert sich in den meisten Fällen auf die Bestimmung der Biege- und Torsionsmomente. Die Überlagerung der Spannungszustände erfolgt gemäß der vollständigen Arbeitsgleichung.

2.6.4 Lagerreaktionen

Für den in Abbildung 2.19 dargestellten Rahmen soll die Ermittlung der Lagerreaktionen gezeigt werden. Das Tragwerk wird dazu in die Ebenen 1-3 und 2-3 projiziert.

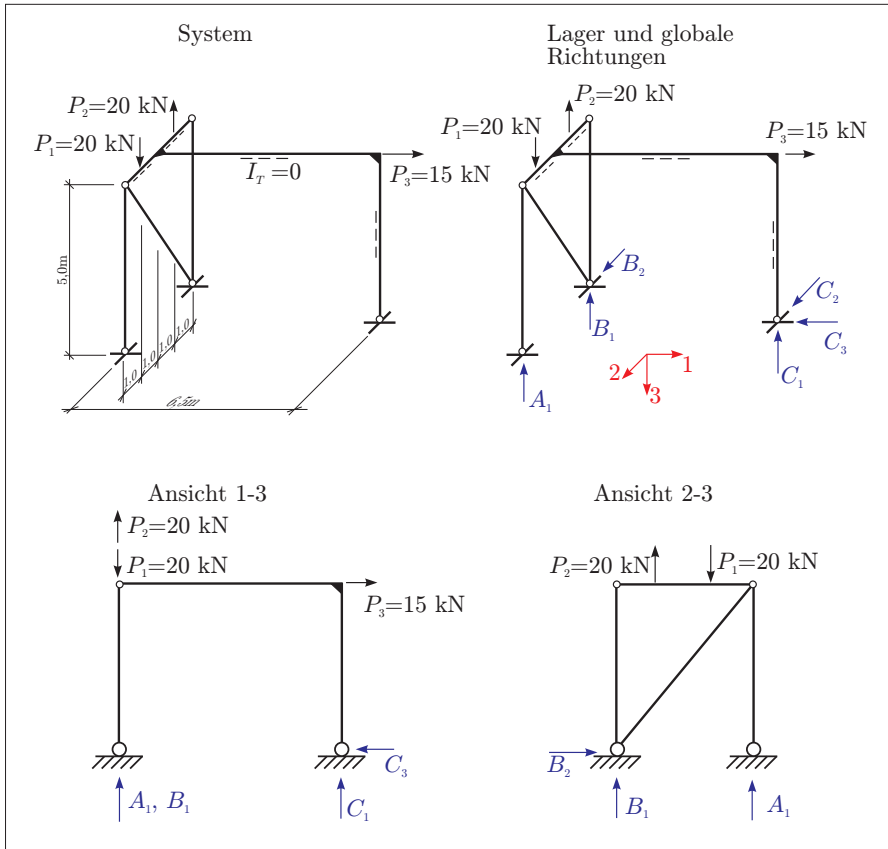


Abb. 2.19. Bestimmung der Lagerreaktionen bei einem Raumtragwerk. System mit Ansichten.

Ebene 1-3

Die Kräfte P_1 und P_2 liefern keinen Beitrag zu den Lagerreaktionen $A_{1,13}$, $B_{1,13}$ und $C_{1,13}$. Sie wirken in der Ebene 2-3. Aus diesem Grund muss in der Ebene 2-3 das Lager C nicht beachtet werden. Zudem ist auch die Torsionssteifigkeit im langen Riegel Null, es kann somit auch keine Drehung übertragen werden. Nur die Kraft P_3 erzeugt in der Ebene 1-3 Lagerreaktionen. Damit folgt:

$$\sum \vec{H} = 0 \Rightarrow C_{3,13} = P_3 = 15 \text{ kN}$$

$$\sum \vec{M} = 0 \Rightarrow -2A_{1,13} = -2B_{1,13} = C_{1,13} = 15 \cdot \frac{5}{6} = 12,5 \text{ kN}.$$

Ebene 2-3

... liefert folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}\sum^{\rightarrow} H &= 0 \Rightarrow B_{2,23} = 0 \\ \sum^{\curvearrowright} M &= 0 \Rightarrow A_{1,23} = -B_{1,23} = 20 \cdot 2/4 = 10 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Lager gesamt

Aus den einzelnen Ansichten folgt:

$$\begin{aligned}A_1 &= A_{1,13} + A_{1,23} = -12,5/2 + 10 = 3,75 \text{ kN}, \\ B_1 &= B_{1,13} + B_{1,23} = -12,5/2 - 10 = -16,25 \text{ kN}, \\ B_2 &= B_{2,23} = 0, \\ C_1 &= C_{1,13} = 12,5 \text{ kN}, \\ C_2 &= 0 \quad \text{und} \\ C_3 &= C_{3,13} = 15 \text{ kN}.\end{aligned}$$

2.6.5 Schnittgrößen

Die Ermittlung der Schnittgrößen soll am in Abbildung 2.20 dargestellten System gezeigt werden.

Zunächst werden die Momente M_y über Projektionen (Blicke) bestimmt. Anschließend werden nach Kräftezerlegung die Momente M_z und M_T berechnet. Die Zerlegung der Kräfte stellt eines der größten Probleme bei räumlichen Statikberechnungen dar. Liegen verteilte Lasten vor, so ist – außer am direkt belasteten Tragwerksteil – mit den Resultierenden zu rechnen.

2.7 Zum Merken

Für die Berechnung eines statisch unbestimmten Systems müssen Nebenbedingungen (Gelenke, Entfernung von Lagern, ...) geschaffen werden, so dass ein statisch bestimmtes System – das Hauptsystem – entsteht, denn nur dieses ist über Gleichgewichtsbetrachtungen hinsichtlich der Schnittgrößen berechenbar.

An den eingefügten Nebenbedingungen werden Einheitskräfte angetragen. Sowohl für die eigentliche Belastung wie auch für die Einheitskräfte werden Schnittgrößenverläufe ermittelt.

Die Berechnung der δ_{ik} -Zahlen ist eine Berechnung der Verformungen und in gewisser Hinsicht der Wechselwirkung der Energien aus den Spannungszuständen. Die Verformungen – oder Energien – werden mit Hilfe der Elastizitätsgleichung so eingestellt, dass die geometrischen Randbedingungen des Tragwerks an den anfangs eingefügten Nebenbedingungen eingehalten werden, d.h. es dürfen keine Knicke oder Sprünge im statisch unbestimmten System vorhanden sein.

Kern des Kraftgrößenverfahrens ist somit die Energieberechnung über Einheitskräfte im Zusammenspiel mit der Energiebilanzierung über die Elastizitätsgleichung. Die Bezeichnung Kraftgrößenverfahren kommt also nicht nur daher, dass man zunächst die Kräfteberechnung durchführen muss, sondern auch daher, dass ein wichtiger Teil des Verfahrens die Betrachtung der energetischen Wechselwirkung von Kraftgrößen infolge Einheits-Kraftgrößen ist.

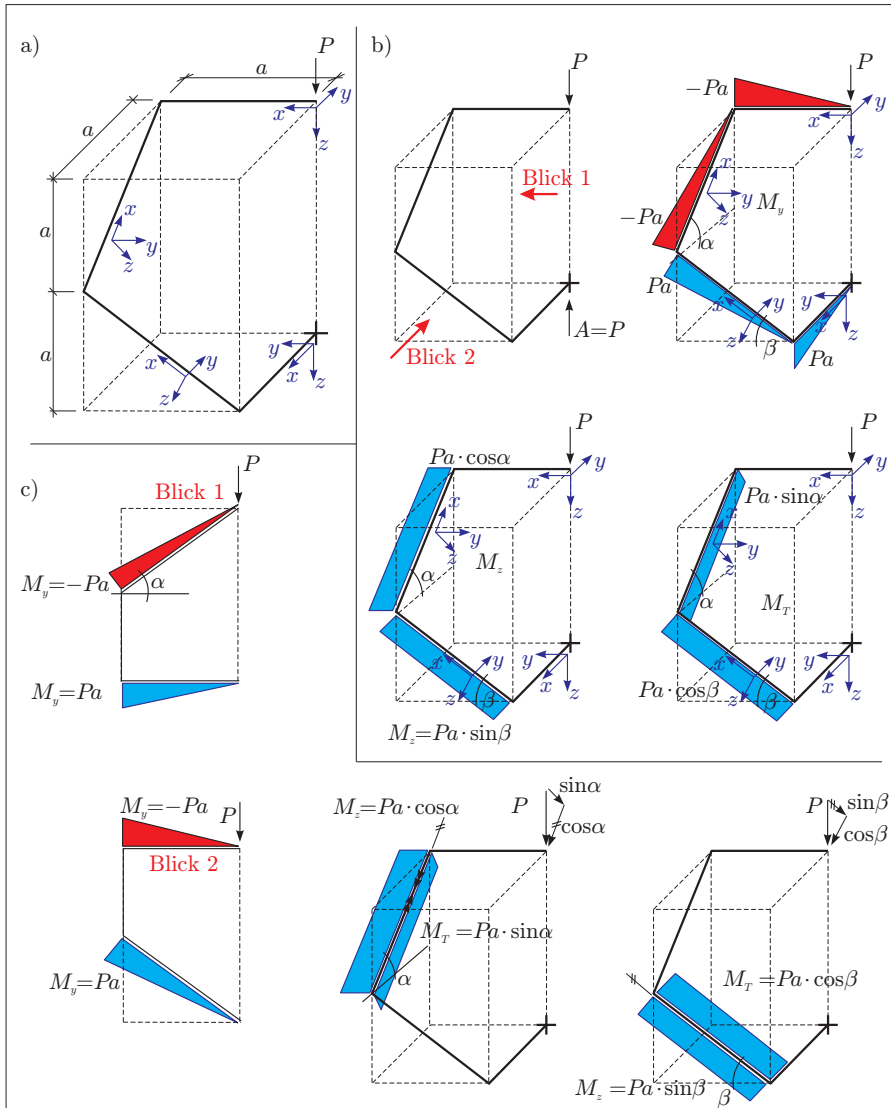


Abb. 2.20. Schnittgrößen bei einem räumlichen Tragwerk. a) System, b) Schnittgrößen und Lager und c) Hilfsansichten.

2.8 Fragerunde

1. Wieso können durch Anwendung des Schnittprinzips nur statisch bestimmte Tragwerke berechnet werden?
2. Wie lautet die Elastizitätsgleichung, und wofür wird sie verwendet?
3. Kann man mit Hilfe des Schnittprinzips die Schnittgrößen an statisch unbestimmten Tragwerken kontrollieren?
4. Warum werden bestimmte Spannungszustände zueinander orthogonal gesehen? Welche sind es?
5. Aus welchem Grund sind Temperaturbelastungen für statisch bestimmte Systeme eher unkritisch, jedoch für statisch unbestimmte Systeme mitunter sogar maßgeblich für die Bemessung?
6. Wieso kann man das Vorzeichen von vielen Schnittgrößen aus der Verformungsfigur ableiten, von manchen aber auch nicht?
7. Kann man mit dem Kraftgrößenverfahren/ Schnittprinzip auch gekrümmte Bauteile berechnen? Wie würden Sie vorgehen? Wie würden Sie die Güte des Ergebnisses einstufen?
8. Kann ein statisch bestimmtes System ausschließlich durch Verformungsbedingungen berechnet werden, oder müssen immer Gleichgewichtsbedingungen verwendet werden?

Weggrößenverfahren

3.1 Matrizenverschiebungsmethode

3.1.1 Eine Welt aus Federn

In der Mechanik und Statik werden zwei grundlegend verschiedene Verfahren zur Tragwerksanalyse betrachtet: Kraftgrößenverfahren und Weggrößenverfahren.

Das bereits vorgestellte Kraftgrößenverfahren (KGV) beruht auf dem Schnittprinzip und den Verformungsbedingungen. Das eigentliche Tragwerk muss in ein statisch bestimmtes System überführt werden. Entsprechend der hinzugefügten Verformungsfreiheitsgrade (Damit sind Gelenke gemeint.) müssen Hilfszustände generiert werden. Es existiert jedoch keine richtige Systematik für diesen Prozess. Eine modulare Behandlung von Tragwerken mit vorgefertigten *Elementen* ist deshalb nicht möglich und eine EDV-gestützte Berechnung folglich nur schwer zu realisieren. Das Kraftgrößenverfahren ist somit nur für die manuelle Berechnung von Tragwerken vorgesehen, denn nur der Mensch hat genügend Phantasie, um das Kraftgrößenverfahren auch anzuwenden.

Prinzipiell stellen die Weggrößenverfahren das Spiegelbild zum KGV dar; Wurden bei dem Kraftgrößenverfahren in erster Linie Kraftgrößen berechnet, so werden beim Weggrößenverfahren immer erst einmal die Weggrößen bestimmt. Es werden Verformungen betrachtet und hieraus Kräfte abgeleitet. Das Tragwerk wird mit standardisierten Bauteilen modelliert, z.B. Balken und Stab. Die modularisierte Behandlung und der schematische Ablauf ermöglichen die EDV-Behandlung von Tragwerken. Die Matrizenverschiebungsmethode (MVM) ist deshalb von großer Bedeutung, weil sie die grundlegenden Mechanismen der finite Elemente Methode (FEM) beinhaltet.

Die Berechnungen nach dem Weggrößenverfahren sind mit einem deutlich größeren Rechenaufwand verbunden, als die Berechnungen nach dem Kraftgrößenverfahren. Dem Menschen fehlt hier die nötige Rechenleistung, nicht aber dem Computer. Das Weggrößenverfahren ist ein auf den Computer zugeschnittenes Verfahren.

Das in diesem Kapitel behandelte Weggrößenverfahren betrachtet statische Systeme als Federn. Ein einfacher und sehr geläufiger Fall für diese Betrachtungsweise ist die Feder (siehe Abbildung 3.1 a) und das von ihr abgeleitete Federgesetz

$$k \cdot u = f$$

wobei k die Steifigkeit, u die Verformung und f die hierzu gehörende Kraft ist. Die Verformungen und Kräfte an einem Tragwerk sind offensichtlich zueinander proportional; Kraft und Verformung sind duale Größen, denn sie sind über die Steifigkeit untrennbar verknüpft.

Wird die Feder frei geschnitten (siehe Abbildung 3.1 b), so besitzt sie an beiden Enden Verformungs- und Kraftfreiheitsgrade. Wird die linke Seite festgehalten ($u_1 = 0$) und an der rechten mit einer Kraft f_2 gezogen, so bedarf es einer Kraft links von $f_1 = -f_2$ zum Festhalten. Die Verschiebung rechts ist dann $u_2 = f_2 \cdot l/(EA)$.

Bei Fixierung der rechten Seite und Lastangriff auf der linken ergeben sich dieselben Ergebnisse, nur mit vertauschten Vorzeichen. In Matrixschreibweise führt diese Betrachtung auf

$$\underbrace{\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_K \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_u = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}}_f.$$

Die Kräfte sind mit den Verschiebungen über die Steifigkeitsmatrix verknüpft.

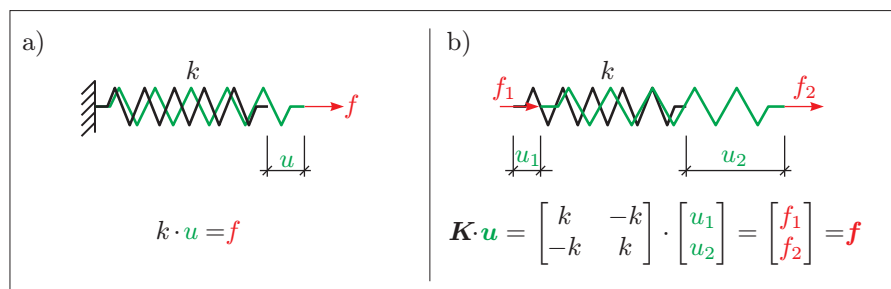


Abb. 3.1. Das Federgesetz als Grundlage der Matrizenverschiebungsmethode. a) Feder mit einem Freiheitsgrad und b) mit zwei Freiheitsgraden.

Für die Herleitung der Elemente der Steifigkeitsmatrix stehen noch andere Verfahren zur Verfügung. In [20] werden die Wege über das Prinzip der Virtuellen Verrückungen und über das Verfahren von Ritz dargestellt.

Das Ergebnis der Betrachtungen ist jedoch stets dasselbe: Die Einträge in den Steifigkeitsmatrizen ergeben sich aus der Überlagerung von Ableitungen der Einheitsverformungen. Einheitsverformungen sind diejenigen Verformungsfiguren, die sich an einem Element (Feder, Stab oder Balken) einstellen, wenn alle Weggrößen bis auf eine an den Rändern gesperrt sind und eine Weggröße von Eins vorgegeben wird. Die Einheitsverformungen werden in Abschnitt 3.5 näher behandelt.

Die Steifigkeitseinträge für die zum Stab gehörende Matrix lauten:

$$k_{ij} = \frac{EA}{l} \int_0^1 \varphi'_i \cdot \varphi'_j dx$$

und für den Balken ergeben sich die Koeffizienten zu

$$k_{ij} = \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \varphi''_i \cdot \varphi''_j dx$$

wobei die Funktionen φ die Einheitsverformungen für den jeweiligen Freiheitsgrad sind. Einheitsverformungen werden später noch ausführlich behandelt.

3.1.2 Eigenschaften einer Steifigkeitsmatrix

Eine Steifigkeitsmatrix beschreibt vollständig die Zusammenhänge der Kraft- und Weggrößen in einem Tragwerkselement oder auch der gesamten Tragstruktur. Durch geeignete Wahl der Verschiebungsvektoren können die Herleitungsgrundlagen (Prinzip der virtuellen Verrückungen, Gleichgewicht, etc.) aus dem Federgesetz für mehrdimensionale Federn extrahiert werden.

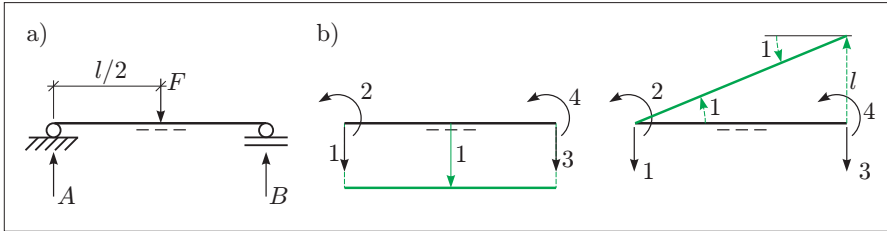


Abb. 3.2. a) Statistisches System mit Auflagern und angreifenden Kräften. b) Zwei System mögliche Starrkörperbewegungen, links eine Translationsbewegung, rechts eine Rotationsbewegung.

Die Steifigkeitsmatrix ist symmetrisch.

Die Einträge der Steifigkeitsmatrix sind deshalb zur Hauptdiagonalen symmetrisch, weil die wechselweisen Arbeiten, die bei der Überlagerung geleistet werden, identisch sind. Die Definition der Steifigkeitskoeffizienten über die Einheitsverformungen beruht gerade darauf, dass die inneren wechselweisen Arbeiten am System betrachtet werden. Dies führt nach dem Satz von Betti¹ genau auf die Symmetrie der Steifigkeitsmatrizen

$$A_{i,mn} = EI \int_0^l \varphi_m'' \cdot \varphi_n'' dx = \int_0^l \frac{M_m \cdot M_n}{EI} dx$$

$$A_{i,nm} = \int_0^l \frac{M_n \cdot M_m}{EI} dx \Rightarrow A_{i,mn} = A_{i,nm}.$$

Die Symmetrie lässt sich auch durch eine aufgebrachte virtuelle Verschiebung zeigen. Es gilt

$$\dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{K} \dot{\mathbf{u}} \Rightarrow k_{ij} = k_{ji},$$

was die Symmetrieeigenschaft bestätigt.

¹ Die Arbeiten, die die Kräfte des ersten Systems auf den Wegen des zweiten Systems leisten sind gleich den Arbeiten, die die Kräfte des zweiten Systems auf den Wegen des ersten leisten.

Starrkörperbewegungen sind kräftefrei.

Wird die Steifigkeitsmatrix (n mal n Elemente) mit einem Verschiebungsvektor (n Elemente), dessen Einträge identisch mit einer Starrkörperbewegung sind, multipliziert, so ist der Kraftvektor gleich dem Nullvektor

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}.$$

Für ein Einfeldträger sind zwei mögliche Starrkörperbewegungen in Abbildung 3.2 b dargestellt. An diesem Beispiel soll obige Aussage verdeutlicht werden. Für die erste Bewegung gilt $u_1 = u_3 = 1$ und $u_2 = u_4 = 0$, d.h. der Balken führt eine vertikale Verschiebung von 1 aus und verdreht sich nicht.

$$\begin{bmatrix} \frac{12 EI}{l^3} & -\frac{12 EI}{l^3} \\ -\frac{12 EI}{l^3} & \frac{12 EI}{l^3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für die zweite Starrkörperbewegung, eine Verdrehung von 45 Grad um das linke Auflager, hat die Weggrößen $u_2 = u_4 = 1$, $u_3 = -l$ und $u_1 = 0$. Demnach ergibt sich folgende Gleichung.

$$\begin{bmatrix} \frac{4 EI}{l} & \frac{6 EI}{l^2} & \frac{2 EI}{l} \\ \frac{6 EI}{l^2} & \frac{12 EI}{l^3} & \frac{6 EI}{l^2} \\ \frac{2 EI}{l} & \frac{6 EI}{l^2} & \frac{4 EI}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -l \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Das System ist im Gleichgewicht.

Die Verwendung der Starrkörperbewegungen führt auf das Kräfte- beziehungsweise Momentengleichgewicht. Dazu ist die Gleichung $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$ von links mit einem Starrkörperbewegungsvektor zu multiplizieren. Da die Multiplikation der Steifigkeitsmatrix mit dem Vektor $\mathbf{u}_0$ den Nullvektor ergibt, muss die gesamte Gleichung Null sein,

$$\mathbf{u}_0^T \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{u}_0^T \mathbf{f} = 0.$$

Die im Kraftvektor stehenden Kräfte, dass sind alle am System vorhandenen äußeren Lasten, halten das System im Gleichgewicht. Die erste Starrkörperbewegung in Abbildung 3.2 soll wieder als Beispiel dienen. Die angreifende Last F wird dafür jeweils zur Hälfte auf die beiden Auflagerknoten verteilt, da die Bewegungen nur in den Knotenpunkten betrachtet werden. In der Resultierenden entspricht diese Aufteilung wieder der angreifenden Last. Folglich enthält der $\mathbf{f}$ -Vektor die beiden zu berücksichtigenden Einträge $f_1 = -A + F/2$ und $f_3 = -B + F/2$. Dies führt auf die Gleichung

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -A + F/2 \\ -B + F/2 \end{bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -A - B + F = 0,$$

und das entspricht gerade der Summe aller vertikalen Lasten, $\downarrow \sum V = 0$.

Eine Starrkörperbewegung führt dazu, dass die linke Seite der Gleichung zu Null wird. Folglich muss auch das Skalarprodukt auf der rechten Seite Null sein, so dass

die geleistete Arbeit der äußeren Kräfte, die alle im f -Vektor enthalten sind, gerade Null wird. Das Prinzip der virtuellen Verrückungen für statisch bestimmte Systeme lässt sich somit in der Form schreiben:

$$\delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{f} = 0.$$

3.1.3 Zusammenfügen von mehreren Tragwerkselementen

Die Generierung der Gesamtsteifigkeitsmatrix eines Systems erfolgt (theoretisch) über den Vergleich von mehrfach belegten Freiheitsgraden. Dazu sind lokale (am Tragwerkselement) und globale Freiheitsgrade (an markanten Stellen des Tragwerkes, in der Regel den Elementgrenzen) zu definieren. Die Verknüpfungsmatrix, wegen der Eintragsmöglichkeiten 0 oder 1 auch *Boolesche Matrix* genannt, stellt den Zusammenhang zwischen Elementfreiheitsgraden und globalen Freiheitsgraden dar. Beispielsweise gilt für das System in Abbildung 3.3:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{f} \\ \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f_{1,1} \\ f_{1,2} \\ f_{2,1} \\ f_{2,2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{B}^T \cdot \bar{\mathbf{u}} \\ \begin{bmatrix} u_{1,1} \\ u_{1,2} \\ u_{2,1} \\ u_{2,2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix ergibt sich aus der unverknüpften Matrix der Elemente $\tilde{\mathbf{K}}$ durch Multiplikation mit der Booleschen Matrix $\mathbf{B}$ gemäß

$$\mathbf{B} \cdot \tilde{\mathbf{K}} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{K}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & -k \\ 0 & 0 & -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}.$$

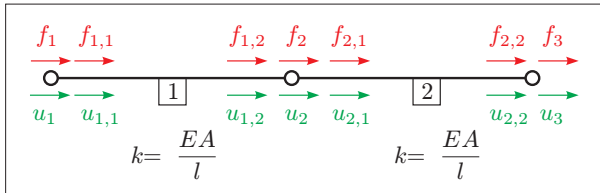


Abb. 3.3. System mit zwei Stabelementen. Lokale und globale Freiheitsgrade.

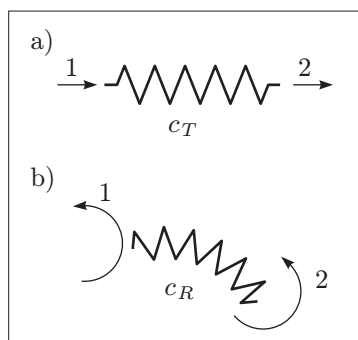
Einfacher und gebräuchlicher ist jedoch der Weg über eine Inzidenztabelle (siehe Tabelle 3.1). Die lokalen Freiheitsgrade werden genau den globalen Freiheitsgraden

Tabelle 3.1. Inzidenztabelle zum Beispiel aus Abbildung 3.3.

Globaler Freiheitsgrad	1	2	3
Lokaler Freiheitsgrad, Element 1	1	2	
Lokaler Freiheitsgrad, Element 2		1	2

zugeordnet, in deren Spalte sie stehen. Die Indizierung erfolgt stets doppelt, so dass ein lokaler Freiheitsgrad x, y auf einen globalen i, j abgebildet wird. Ist einem Element keinen Eintrag bezüglich eines globalen Freiheitsgrades zugeordnet, so ist es dort nicht angeschlossen.

Federelemente im System

**Abb. 3.4.** a) Translationsfeder als Element und b) Rotationsfeder als Element

Federelemente werden genau wie alle anderen Elemente wie Stab und Balken auch in das System über die Inzidenztabelle eingebunden. In Abbildung 3.4 sind die zwei Federelemente, Translations- und Rotationsfeder, dargestellt. Beide Elemente besitzen zwei Freiheitsgrade, die Translationsfeder jeweils einen am Stabanfang und -ende in Wirkungsrichtung der Feder. In der Regel stimmen diese Elementfreiheitsgrade dann mit einem globalen horizontalen oder vertikalen Freiheitsgrad überein. Aber, genau wie bei einem Stab, können Translationsfedern auch in einem Winkel angeordnet sein und haben dann insgesamt vier Freiheitsgrade, zwei horizontale und zwei vertikale, siehe auch Kapitel 3.3.3. Anstelle der Stabsteifigkeit EA/l wird die Federsteifigkeit c_T eingesetzt.

Rotationsfedern haben ebenfalls zwei Freiheitsgrade, allerdings sind es Drehfreiheitsgrade, die in das globale System eingefügt, mit den globalen Drehfreiheitsgraden zu verknüpfen sind. Für die Rotations- oder auch Drehfeder genannt, ist die in Abschnitt 3.3.2 beschriebene Elementsteifigkeitsmatrix zu verwenden. Es ist lediglich die Dehnsteifigkeit EA/l durch die Drehfedersteifigkeit c_R auszutauschen.

3.1.4 Kräfte und Verformungen

An jedem Knoten kann entweder eine Kraft- oder eine Verformungsgröße vorgegeben werden. Die Vorgabe beider Größen ist nicht zulässig. Dies wird schon bei der einfachen Feder offensichtlich: Die gekoppelten Größen u und f können bei bekannter Steifigkeit k nicht beide vorgegeben werden. Die Kräfte ergeben sich aus den inneren Lasten (f -Vektor) und den äußeren Einwirkungen – oder auch negativen Festhaltekräften – (p -Vektor). Im folgenden Kapitel wird die Berechnung der Kraftvektoren näher erläutert.

Die Berechnung der negativen Festhaltekräfte erfolgt gemäß

$$p_i = \int_0^l \varphi_i(x) p(x) dx.$$

Die Überlagerung der i -ten Einheitsverformung mit der Belastungsfunktion ergibt demnach die negative Festhaltekraft p_i . Die Einheitsverformungen werden später noch ausführlich beschrieben.

Ist die Steifigkeit eines Teils oder eines gesamten Systems unbekannt, so kann die natürlich ermittelt werden, wenn die Kräfte und die Wege bekannt sind

$$\begin{aligned} K \cdot u &= f \\ K &= f \cdot u^{-1}. \end{aligned}$$

3.2 Belastung am Knoten und im Feld

3.2.1 Einführung

Für die Berechnung müssen auch die Belastungen, die auf das Tragwerk einwirken, erfasst werden. Greifen Lasten direkt an Knotenpunkten des Systems an, so werden diese direkt an den entsprechenden Einträgen im Vektor f berücksichtigt. Doch bei Lasten im Feld und komplizierteren Geometrien kann nicht für jede Last ein Knotenpunkt generiert werden, für verteilte Lasten wären folglich unendlich viele Punkte notwendig. Deshalb werden Lastvektoren p gebildet. Diese dienen dazu, die Einwirkungen von Feldbelastungen zu erfassen und auf die Freiheitsgrade an den Elementrändern zu verteilen.

3.2.2 Aufteilung in f - und p -Vektoren

Die Lasten werden auf die Freiheitsgrade der Elemente verteilt. Die äußere Einwirkung geht dabei in eine Kombination von Teillasten über (p -Vektor), siehe Abbildung 3.5. Diese Teillasten werden als Lagerdrücke oder negative Festhaltekräfte bezeichnet. Kräfte, die direkt an Knoten angreifen, werden direkt auf die entsprechenden Freiheitsgrade übertragen, sie liefern keinen eigenen p -Vektor, sondern werden im f -Vektor zusammengefasst. In Abbildung 3.6 sind Lagerdrücke für elementare Lastfälle angegeben. Angaben für weitere Lastfälle finden sich z.B. bei [25]. In die Berechnung geht die Summe aus p - und f -Vektoren ein. In Abbildung 3.7 sind verschiedene Belastungen dargestellt.

System mit Fhg. MVM	
Lagerkraft = Festhaltekraft	
Lagerdruck = neg. Festhaltekraft	

Abb. 3.5. Aus den Belastungen folgen Lagerdrücke. Deren Wirkungsrichtungen stimmen, bis auf das rechte Einspannmoment, bezogen auf die Positivrichtungen aus der MVM überein.

	p_1	p_2	p_3	p_4
	$\frac{ql}{2}$	$-\frac{ql^2}{12}$	$\frac{ql}{2}$	$\frac{ql^2}{12}$
	$0,15ql$	$-\frac{ql^2}{30}$	$0,35ql$	$\frac{ql^2}{20}$
	$(0,35 q_i + 0,15 q_k)l$	$-\frac{1,5 q_i + q_k}{30}l^2$	$(0,15 q_i + 0,35 q_k)l$	$\frac{q_i + 1,5 q_k}{30}l^2$
	$\frac{ql}{3}$	$-\frac{ql^2}{15}$	$\frac{ql}{3}$	$\frac{ql^2}{15}$
	$\frac{P}{2}$	$-\frac{Pl}{8}$	$\frac{P}{2}$	$\frac{Pl}{8}$
	$P(3 - 2\beta) \beta^2$	$-Pl \alpha \beta^2$	$P(3 - 2\alpha) \alpha^2$	$Pl \alpha^2 \beta$

Abb. 3.6. Lagerdrücke für elementare Lastfälle.

Schräge Einzellast am Knoten

Abbildung 3.7 a: Die Last wird in die Richtungen der globalen Freiheitsgrade aufgeteilt. Sie wirkt den positiven Richtungen entgegen, weshalb das Vorzeichen negativ wird:

$$\begin{aligned}
 f_6 &= -P \cdot \cos(26,565^\circ) \\
 f_7 &= -P \cdot \sin(26,565^\circ) \\
 f_8 &= f_9 = 0.
 \end{aligned}$$

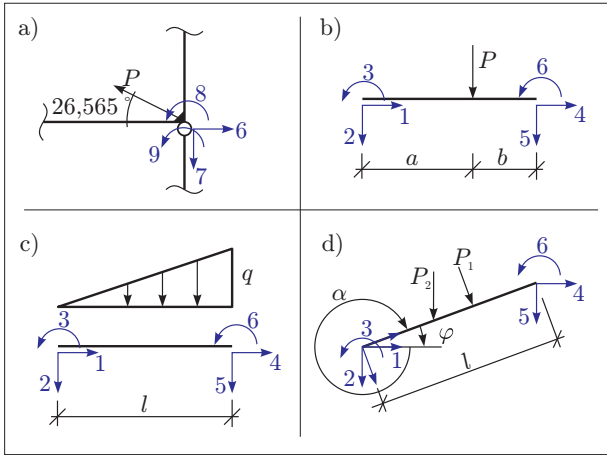


Abb. 3.7. Beispiel für Belastungen: a) Schräge Last am Knoten, b) Last im Feld, c) Verteilte Last und d) Gedrehtes Element.

Einzellast im Feld

Abbildung 3.7 b: Die Last wird in die Lagerdrücke aufgeteilt. Diese ergeben sich aus der Tabelle der Lagerreaktionen zu

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_4 = 0 \\
 p_2 &= \frac{3-2b}{l} \cdot \frac{b^2}{l^2} \cdot P \\
 p_3 &= -\frac{ab^2}{l^2} \cdot P \\
 p_5 &= \frac{3-2a}{l} \cdot \frac{a^2}{l^2} \cdot P \\
 p_6 &= \frac{a^2b}{l^2} \cdot P.
 \end{aligned}$$

Veränderliche Last im Feld

Abbildung 3.7 c: Die Last wird in die Lagerdrücke aufgeteilt. Diese ergeben sich aus der Tabelle der Lagerreaktionen zu

$$\begin{aligned}
 p_1 &= p_4 = 0 \\
 p_2 &= 0,15 \cdot Pl \\
 p_3 &= -\frac{Pl^2}{30} \\
 p_5 &= 0,35 \cdot Pl \\
 p_6 &= \frac{Pl^2}{20}.
 \end{aligned}$$

Gedrehtes Element

Abbildung 3.7 d: Die Last P_1 kann entweder erst in lokale Lagerdrücke überführt und später durch eine Transformation auf die globalen Richtungen umgerechnet werden

oder die Last wird gleich in globale Richtungen aufgeteilt und liefert dann je einen p-Vektor für die horizontalen und vertikalen Lastanteile. Die Last P_2 kann direkt in Lagerdrücke umgesetzt werden; als Länge ist dann aber nicht l sondern $l \cdot \cos(\varphi)$ – also die projizierte Länge – in den Formeln für die Lagerreaktionen einzusetzen.

Die Transformation von Verschiebungen und Kräften erfolgt mittels Transformationsmatrix. Dabei gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}} &= \mathbf{u} \\ \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} \\ \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{f}} &= \mathbf{f} \\ \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f} &= \bar{\mathbf{f}} \\ \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{p}} &= \mathbf{p} \\ \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{p} &= \bar{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

mit der Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & 0 & -s & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ wobei } s = \sin(\alpha) \text{ und } c = \cos(\alpha).$$

Der Verdrehungswinkel α wird von den globalen (i.d.R. dem ersten) zu den lokalen Freiheitsgraden im Uhrzeigersinn gemessen. Globale Kraftgrößen bekommen einen Überstrich, lokale keinen.

3.2.3 Eingeprägte Lagerverschiebungen

Neben den Kräften werden auch Baugrundsetzungen als Lastfälle – in Form von eingepprägten Weggrößen – betrachtet. Für die Berücksichtigung dieser Lastfälle lassen sich zwei Wege beschreiben; beide führen zum richtigen Ergebnis. Der erste Weg ist das Umstellen des linearen Gleichungssystems und der zweite Weg folgt der Vorgehensweise vom vorigen Kapitel für die Berechnung des Lastvektors.

Umformen des linearen Gleichungssystems

Bisher war es immer so, dass ein Weggröße entweder Null² oder die Weggröße unbekannt ist. Zur Berechnung der unbekannten Weggrößen wurden die Zeilen und Spalten gestrichen, die mit Null multipliziert werden. Für die eingepprägten Lagerverschiebungen gilt, dass sie ebenfalls bekannt sind, aber eben nicht Null. Daher können diese Spalten nicht mehr gestrichen werden. Es werden diese Einträge der Steifigkeitsmatrix mit dem Wert der eingepprägten Weggröße multipliziert und mit negativem Vorzeichen auf die rechte Seite des Gleichungssystems gebracht. Dieser Schritt ist in Abbildung 3.9 schematisch dargestellt. Das lineare Gleichungssystem wird einfach nach bekannten und unbekannten Größen sortiert.

² ... und damit bekannt sind, weil an der Stelle ein Auflager ist,...

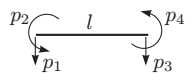
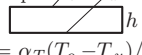
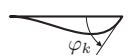
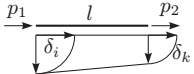
	p_1	p_2	p_3	p_4
Temp. T_o T_u  $\kappa = \alpha_T(T_o - T_u)/h$	0	$-\kappa EI$	0	κEI
	$(\delta_k - \delta_i) \frac{12EI}{l^3}$	$-(\delta_k - \delta_i) \frac{6EI}{l^2}$	$-(\delta_k - \delta_i) \frac{12EI}{l^3}$	$(\delta_k - \delta_i) \frac{6EI}{l^2}$
	$\frac{6EI}{l^2} \varphi_i$	$-\frac{4EI}{l} \varphi_i$	$-\frac{6EI}{l^2} \varphi_i$	$-\frac{2EI}{l} \varphi_i$
	$\frac{6EI}{l^2} \varphi_k$	$-\frac{2EI}{l} \varphi_k$	$-\frac{6EI}{l^2} \varphi_k$	$-\frac{4EI}{l} \varphi_k$
	$(\delta_k - \delta_i) \frac{EA}{l}$	$-(\delta_k - \delta_i) \frac{EA}{l}$		

Abb. 3.8. Lagerdrücke für spezielle Lastfälle wie Temperatur und Lagerverschiebungen.

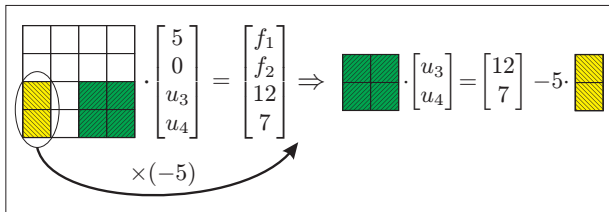


Abb. 3.9. Es werden die Einträge der Matrix mit negativen Vorzeichen auf die linke Seite gebracht, die mit 5 multipliziert werden.

Lagerverschiebungen über den Lastvektor

Als zweiten Weg gibt es die Möglichkeit, die eingeprägte Lagerverschiebung als einen Lastfall anzusehen, d.h. dieser Lastfall wird im p -Vektor mit erfasst. Dazu wird sich der in Abbildung 3.8 dargestellten Tabelle bedient. Sie enthält, genau wie Abbildung 3.6 auch, die Einträge des Lastvektors für bestimmte Lastfälle.

Das Vorgehen ist wie folgt: Die Zeilen und Spalten der bekannten Weggrößen (Unabhängig von der Größe) werden aus der Gesamtsteifigkeitsmatrix, und damit aus dem Gleichungssystem, gestrichen. Auf der rechten Seite ist ein weiterer Eintrag im p -Vektor gemäß Abbildung 3.8 zu berücksichtigen. Damit wird der aus der eingeprägten Lagerverschiebung resultierende Kräfteverlauf berücksichtigt.

Beide Vorgehensweisen führen auf genau die gleichen linearen Gleichungssysteme und haben dem zur Folge auch identische Lösungen.

3.2.4 Lastfall Temperatur

Wird ein Tragwerkselement mit einem Lastfall Temperatur belastet, so hat dies zunächst eine Verformung des Tragwerks, bei gleichmäßiger Temperatur eine Längsdehnung und bei ungleichmäßiger Temperatur eine Krümmung, zur Folge. Wird diese Verformung behindert, so hat dies einen Kraftverlauf zur Folge. In der Matrixverschiebungsmethode bedeutet dies, dass zum Lastfall Temperatur äquivalente Knotenkräfte aufzubringen sind. Diese werden wieder mit Hilfe der Tabelle in Abbildung 3.8 berechnet. Beispielhaft ist in der Tabelle die Berechnung der negativen Festhaltekräfte für den Lastfall ungleichmäßige Temperatur dargestellt.

3.3 Wichtige Matrizen

In der Abbildung 3.10 sind die Freiheitsgrade der stabförmigen Elemente dargestellt. Die Freiheitsgrade von Element und Matrix werden über die Spaltennummer verknüpft.

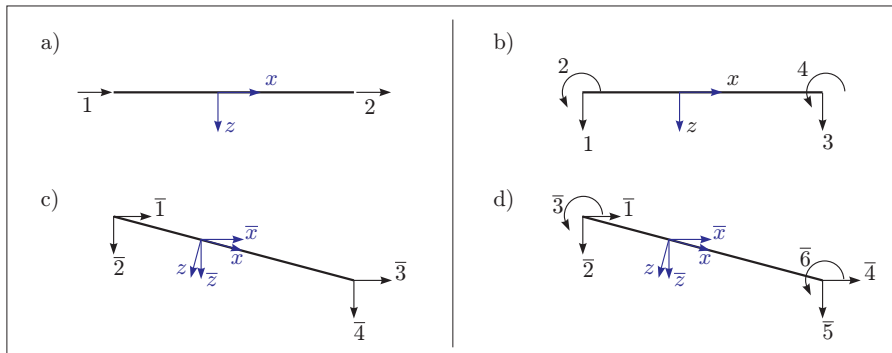


Abb. 3.10. Freiheitsgrade für a) Zug-Druckstab, b) Balken ohne Normalkraft, c) gedrehten Pendelstab und d) gedrehten Balken mit allen Freiheitsgraden

3.3.1 Transformationsmatrix

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es gilt:

- Der Winkel φ wird im Uhrzeigersinn vom globalen zum lokalen Koordinatensystem gemessen.

- Umrechnung von global in lokal: $\mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{f}$
- Umrechnung von lokal in global: $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{f}$
Gleiches gilt für die Weggrößen.
- $c = \cos \varphi$; $s = \sin \varphi$

3.3.2 Steifigkeitsmatrix für den Zug-Druckstab

Mit Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A und Länge des Elementes l gilt:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Steifigkeitsmatrix für die Feder sieht übrigens genauso aus, wie die für den Zug-Druckstab. Das liegt daran, dass Feder und Stab einen Freiheitsgrad an jedem Ende haben, siehe Abbildung 3.10 a. Anstelle der Dehnsteifigkeit EA/l wird bei einer Feder die Federsteifigkeit für Normalkräfte c_T (Translationsfeder) oder für Biegemomente c_R (Rotationsfeder) verwendet.

3.3.3 Steifigkeitsmatrix für den gedrehten Zug-Druckstab

Mit Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A und Länge des Elementes l sowie $c = \cos \varphi$ und $s = \sin \varphi$ gilt:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}.$$

Der gedrehte Stab als Element ist in Abbildung 3.10 c dargestellt.

3.3.4 Steifigkeitsmatrix für den Biegebalken (Bernoulli)

Bei diesem Element wird keine Normalkraft betrachtet, es geht ausschließlich um die Biegung, siehe Abbildung 3.10 b. Mit Elastizitätsmodul E , Flächenträgheitsmoment I und Länge des Elementes l gilt:

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

3.3.5 Steifigkeitsmatrix für vollständiges Balkenelement

Werden die Matrizen für Zug-Druckstab und Biegebalken entsprechend den Freiheitsgraden kombiniert, so entsteht die folgende Matrix, siehe Abbildung 3.10 a kombiniert mit 3.10 b. An den Nullen in der Matrix ist zu erkennen, dass Biegeanteil und Normalkraftanteil nicht gekoppelt sind. Mit Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A , Flächenträgheitsmoment I und Länge des Elementes l gilt:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}.$$

3.3.6 Theorie 2. Ordnung – Geometrische Steifigkeitsmatrix

Die Steifigkeitsmatrix nach Theorie 2. Ordnung setzt sich zusammen aus der Steifigkeitsmatrix nach Theorie 1. Ordnung und einer so genannten geometrischen Steifigkeitsmatrix. Diese hier abgebildete Steifigkeitsmatrix K_G stellt lediglich eine Näherung dar, die Zusatzmatrix, die aus der Theorie 2. Ordnung resultiert, ist in Abschnitt 4.6.4 dargestellt. Für die geometrische Steifigkeitsmatrix orientieren sich die Freiheitsgrade an der Abbildung 3.10 b, d.h. es gibt keine Freiheitsgrade in Stabachsenrichtung.

Mit N als der im Stab vorhandenen Normalkraft³ und Länge des Elementes l gilt:

$$K_G = N \begin{bmatrix} \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ -\frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}.$$

3.3.7 Steifigkeitsmatrix für das vollständige, gedrehte Balkenelement

Die Matrix hat 6×6 Einträge, unabhängig von Theorie 1. oder 2. Ordnung.

$$K = \begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & k_{1,6} \\ & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & k_{2,6} \\ & & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & k_{3,6} \\ & & & k_{4,4} & k_{4,5} & k_{4,6} \\ & \text{sym.} & & & k_{5,5} & k_{5,6} \\ & & & & & k_{6,6} \end{bmatrix}.$$

Die Einträge nach Theorie 1. Ordnung lauten unter Verwendung von Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A , Flächenträgheitsmoment I und Länge des Elementes l sowie $c = \cos \varphi$ und $s = \sin \varphi$:

³ Achtung: Immer vorzeichengerecht einsetzen, d.h. Druck N = negativ, Zug N = positiv.

$$k_{1,1} = c^2 \frac{EA}{l} + s^2 \frac{12 EI}{l^3}$$

$$k_{1,3} = s \frac{6 EI}{l^2}$$

$$k_{1,5} = -cs \frac{EA}{l} + cs \frac{12 EI}{l^3}$$

$$k_{2,2} = s^2 \frac{EA}{l} + c^2 \frac{12 EI}{l^3}$$

$$k_{2,4} = -cs \frac{EA}{l} + cs \frac{12 EI}{l^3}$$

$$k_{2,6} = -c \frac{6 EI}{l^2}$$

$$k_{3,3} = \frac{4 EI}{l}$$

$$k_{3,5} = c \frac{6 EI}{l^2}$$

$$k_{4,4} = c^2 \frac{EA}{l} + s^2 \frac{12 EI}{l^3}$$

$$k_{4,6} = -s \frac{6 EI}{l^2}$$

$$k_{5,5} = s^2 \frac{EA}{l} + c^2 \frac{12 EI}{l^3}$$

$$k_{6,6} = \frac{4 EI}{l}$$

$$k_{1,2} = cs \frac{EA}{l} - cs \frac{12 EI}{l^3}$$

$$k_{1,4} = -c^2 \frac{EA}{l} - s^2 \frac{12 EI}{l^3}$$

$$k_{1,6} = s \frac{6 EI}{l^2}$$

$$k_{2,3} = -c \frac{6 EI}{l^2}$$

$$k_{2,5} = -s^2 \frac{EA}{l} - c^2 \frac{12 EI}{l^3}$$

$$k_{3,4} = -s \frac{6 EI}{l^2}$$

$$k_{3,6} = \frac{2 EI}{l}$$

$$k_{4,5} = cs \frac{EA}{l} - cs \frac{12 EI}{l^3}$$

$$k_{5,6} = c \frac{6 EI}{l^2}$$

Betrachten wir nun die Einträge nach Theorie 2. Ordnung. Mit Elastizitätsmodul E , Querschnittsfläche A , Flächenträgheitsmoment I und Länge des Elementes l sowie $c = \cos \varphi$, $s = \sin \varphi$ und der im Stab wirkenden Normalkraft N gilt:

$$k_{1,1} = c^2 \frac{EA}{l} + s^2 \left(\frac{12 EI}{l^3} + \frac{6 N}{5l} \right)$$

$$k_{1,3} = s \left(\frac{6 EI}{l^2} + \frac{N}{10} \right)$$

$$k_{1,5} = -cs \frac{EA}{l} + cs \left(\frac{12 EI}{l^3} + \frac{6 N}{5l} \right)$$

$$k_{2,2} = s^2 \frac{EA}{l} + c^2 \left(\frac{12 EI}{l^3} + \frac{6 N}{5l} \right)$$

$$k_{2,4} = -cs \frac{EA}{l} + cs \left(\frac{12 EI}{l^3} + \frac{6 N}{5l} \right)$$

$$k_{2,6} = -c \left(\frac{6 EI}{l^2} + \frac{N}{10} \right)$$

$$k_{1,2} = cs \frac{EA}{l} - cs \left(\frac{12 EI}{l^3} + \frac{6 N}{5l} \right)$$

$$k_{1,4} = -c^2 \frac{EA}{l} - s^2 \left(\frac{12 EI}{l^3} + \frac{6 N}{5l} \right)$$

$$k_{1,6} = s \left(\frac{6 EI}{l^2} + \frac{N}{10} \right)$$

$$k_{2,3} = -c \left(\frac{6 EI}{l^2} + \frac{N}{10} \right)$$

$$k_{2,5} = -s^2 \frac{EA}{l} - c^2 \left(\frac{12 EI}{l^3} + \frac{6 N}{5l} \right)$$

$$k_{3,3} = \frac{4EI}{l} + \frac{2NL}{15}$$

$$k_{3,4} = -s \left(\frac{6EI}{l^2} + \frac{N}{10} \right)$$

$$k_{3,5} = c \left(\frac{6EI}{l^2} + \frac{N}{10} \right)$$

$$k_{3,6} = \frac{2EI}{l} - \frac{NL}{30}$$

$$k_{4,4} = c^2 \frac{EA}{l} + s^2 \left(\frac{12EI}{l^3} + \frac{6N}{5l} \right)$$

$$k_{4,5} = cs \frac{EA}{l} - cs \left(\frac{12EI}{l^3} + \frac{6N}{5l} \right)$$

$$k_{4,6} = -s \left(\frac{6EI}{l^2} + \frac{N}{10} \right)$$

$$k_{5,5} = s^2 \frac{EA}{l} + c^2 \left(\frac{12EI}{l^3} + \frac{6N}{5l} \right)$$

$$k_{5,6} = c \left(\frac{6EI}{l^2} + \frac{N}{10} \right)$$

$$k_{6,6} = \frac{4EI}{l} + \frac{2NL}{15}$$

3.4 Nachlaufrechnung

3.4.1 Zwischen den Tragwerksknoten

Die Matrizenverschiebungsmethode berechnet, wie die FEM auch, nur die Knotenpunktverformungen und die Knotenkräfte. Deshalb ist eine Nachlaufrechnung erforderlich, durch die auch elementinterne Verformungen und Schnittgrößen berechnet werden können. In diesem Abschnitt soll kurz erklärt werden, wie aus den globalen Verformungen an den Knoten die lokalen Schnittgrößenverläufe berechnet werden. Die vorgestellte Vorgehensweise gilt für die Berechnungen von stabförmigen Bauteilen (Balken, Stab). Für flächige (Platte, Scheibe) und räumliche Bauteile (Volumenelemente) können beispielsweise die Spannungen an den so genannten Gauß-Punkten zur Ermittlung der Spannungen herangezogen werden. Hier sind die Werte genauer. Details zur Nachlaufrechnung bei Flächenelementen sind z.B. bei [20] zu finden.

3.4.2 Ablauf der Berechnung

Die Nachlaufrechnung zur Bestimmung der Schnittkraftverläufe an den Stäben lässt sich im folgenden Vorgehensschema zusammenfassen.

1. Bestimmung der globalen Verformungen am Gesamtsystem.
2. Ermitteln der Weggrößen für das zu berechnende Element.
3. Transformation der globalen Weggrößen auf Elementebene in lokale Koordinaten.
4. Berechnung der Stabendkräfte unter Verwendung der Elementsteifigkeitsmatrix über $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$.
5. Antragen der lokalen Kräfte in Wirkungsrichtung.
6. Auswertung der Vorzeichen bezüglich des Kraftgrößenverfahrens.
7. Antrag des Schnittkraftverlaufes entsprechend der Belastungsfunktion.

3.4.3 Beispiel

Für das in Abbildung 3.11 a dargestellte System ergibt sich aus der Berechnung der globale Verschiebungsvektor zu:

$$\bar{\mathbf{u}}^T = [\dots; 0,01; 0,02; 0,01; \dots; 0; 0; 0; \dots].$$

Hieraus folgt nun für den schrägen Balken (Abbildung 3.11 b) der lokale Verschiebungsvektor, wobei nur die Einträge für den Knotenpunkt mit den globalen Freiheitsgraden 6, 7 und 8 (lokal 4, 5 und 6) berechnet werden müssen, denn der Fußpunkt erfährt auf Grund der Einspannung keine Verformungen. Unter Beachtung eines Drehwinkels von 315 Grad folgt:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}}_{6,7,8} &= \mathbf{u}_{4,5,6} \\ \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{u}_6 \\ \bar{u}_7 \\ \bar{u}_8 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0,7071 & -0,7071 & 0 \\ 0,7071 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,01 \\ 0,02 \\ 0,01 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -0,00707 \\ 0,02121 \\ 0,01 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Der gesamte Verschiebungsvektor für den schrägen Balken in lokalen Koordinaten lautet nun:

$$\mathbf{u}^T = [0; 0; 0; -0,00707; 0,02121; 0,01].$$

Mit der Elementsteifigkeitsmatrix des Balkens $\mathbf{K}$ und streichen der Spalten, die mit *Null*-Wegen multipliziert werden, ergeben sich die Kräfte zu:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{u} &= \mathbf{f} \\ \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -42.426 & 0 & 0 \\ 0 & -6.364 & -9.000 \\ 0 & 9.000 & 8.485 \\ 42.426 & 0 & 0 \\ 0 & 6.364 & 9.000 \\ 0 & 9.000 & 16.971 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,00707 \\ 0,02121 \\ 0,01 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 300,0 \\ -225,0 \\ 275,8 \\ -300,0 \\ 225,0 \\ 360,6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Die Kräfte werden nun entsprechend der Vorzeichendefinition der Matrizenverschiebungsmethode am Element angetragen (Abbildung 3.11 d). Anschließend erfolgt der Vergleich der Wirkungsrichtungen am Element mit den Positivrichtungen des Kraftgrößenverfahrens (siehe Abbildung 3.11 c), weil hiermit die Nachlaufrechnung durchgeführt wird. Aus den Randkräften und Momenten können dann die Schnittkraftflächen bestimmt werden.

Aus den globalen Verformungen hätten zunächst auch die globalen Kräfte bestimmt werden können. Diese hätten dann nur noch transformiert werden müssen, um die lokalen Kräfte zu erhalten.

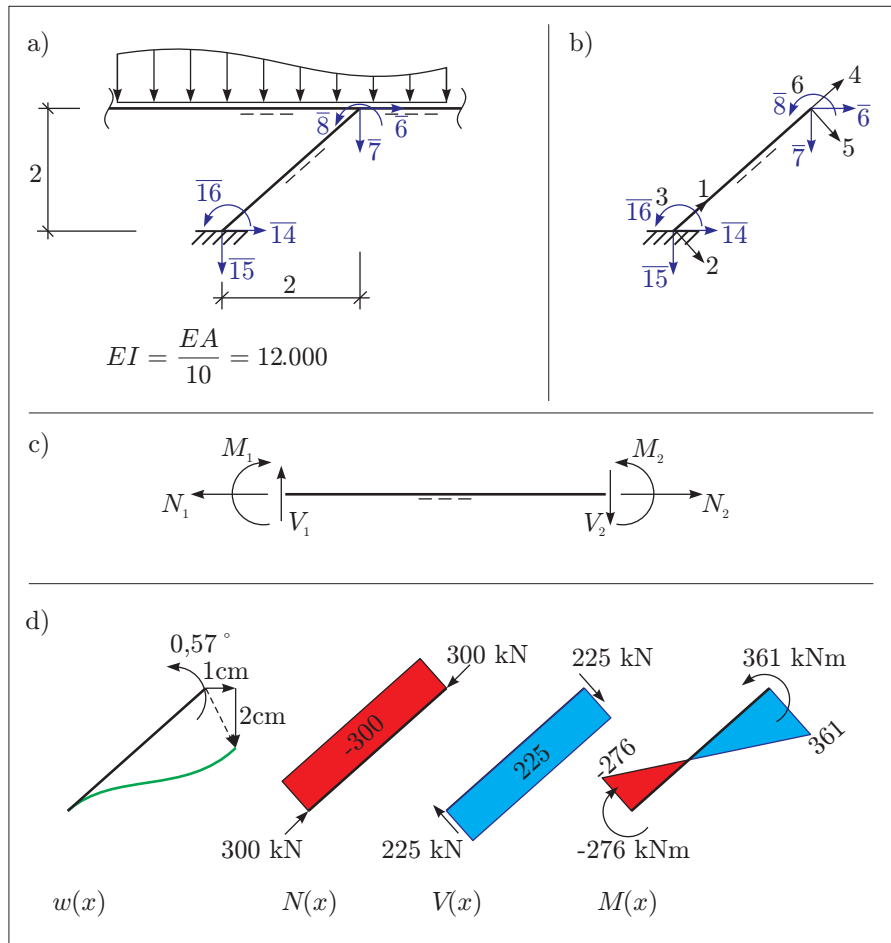


Abb. 3.11. Beispiel für Belastungen: a) System, b) Element, c) Vorzeichendefinition für Kraftgrößenverfahren und d) Verformung und Schnittgrößen am Element.

3.4.4 Berechnungen mit Ablaufschema

Berechnungen nach der MVM lassen sich sehr gut schematisieren. Der Rechenablauf ist im Folgenden skizziert.

Zunächst müssen entsprechend der Einwirkungen die unbekannten Weggrößen des u -Vektors ermittelt werden. Dazu wird die reduzierte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\text{red}}$

verwendet. Sie ergibt sich aus all den Freiheitsgraden, an denen die Verschiebungen unbekannt sind, d.h. die Zeilen und Spalten, wo $u_i = 0$ ist, können gestrichen werden. In Abhängigkeit von Kräften werden die Verschiebungen bestimmt. Die Lösung des linearen Gleichungssystems kann mit dem Gauß-Algorithmus, der Zeilennormalform oder anderen Verfahren gelöst werden. Anschließend wird der Kraftvektor ($\mathbf{f} + \mathbf{p}$) vervollständigt. Die hierfür notwendige Matrix $\mathbf{K}_f$ ergibt sich aus den gleichen Spalten wie $\mathbf{K}_{\text{red}}$, jedoch leiten sich die Zeilen aus den noch unbekannten Kräften ab.

In Abbildung 3.12 a ist ein System dargestellt, welches mit der MVM berechnet werden soll. Der Ablauf der Berechnung erfolgt gemäß der folgenden Schritte:

1. Antragen der globalen Freiheitsgrade, von oben links nach unten rechts. Eine Optimierung bezüglich einer schnelleren Berechnung (Ziel: Bandstruktur der Matrix, vergleiche [26]) ist hier nicht gefordert, wird aber innerhalb der EDV-Berechnung oft automatisch durchgeführt.
2. Aufstellen der Inzidenztabelle und Zuordnung der lokalen zu globalen Freiheitsgraden.
3. Bestimmung der Null-Verschiebungen. Hinweis: Das Element IV ist mit einer beliebig großen Dehnsteifigkeit versehen. Dies führt zu einer Nullverschiebung am Freiheitsgrad 6. Ein weiterer Effekt ist, dass die Elemente der zugehörigen Steifigkeitsmatrix deutlich größere Werte enthalten, als die übrigen Einträge anderer Elemente. Dies ist numerisch ungünstig und sollte auf jeden Fall vermieden werden. Die Elemente III und IV müssen von lokalen in globale Koordinaten transformiert (gedreht) werden.
4. Aufstellen der Lastvektoren. Dabei sollte in direkt im Knoten angreifende Lasten ($\mathbf{f}$ -Vektor) und in Lasten, die innerhalb eines Elementes angreifen ($\mathbf{p}$ -Vektor, negative Festhaltekräfte als Knotenlasten), unterschieden werden.
5. Bestimmung der reduzierten Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\text{red}}$ zur Verformungsbestimmung.
6. Berechnung der unbekannten Verformungen $\mathbf{u}_{\text{red}}$

$$\mathbf{u}_{\text{red}} = \mathbf{K}_{\text{red}}^{-1} \cdot (\mathbf{p}_{\text{red}} + \mathbf{f}_{\text{red}}).$$

7. Bestimmung der reduzierten Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_f$ zur Kräftebestimmung.
8. Berechnung der unbekannten Kräfte $\mathbf{f}_f$

$$\mathbf{f}_f = \mathbf{K}_f \cdot \mathbf{u}_f - \mathbf{p}_f.$$

9. Nachlaufrechnung zur Bestimmung der Schnittgrößen.

3.5 Einheitsverformungen

3.5.1 Einführung

Einheitsverformungen sind die Grundlage der MVM. Sie liefern die Einflussfunktionen (beispielsweise die Hermite-Polynome), die für die Berechnung der Steifigkeitsmatrizen und Lastvektoren verwendet werden.

Eine Einheitsverformung ist die Verformung von einem Freiheitsgrad eines Systems, alle anderen Freiheitsgrade bleiben unverändert. Die hierfür am Tragwerk

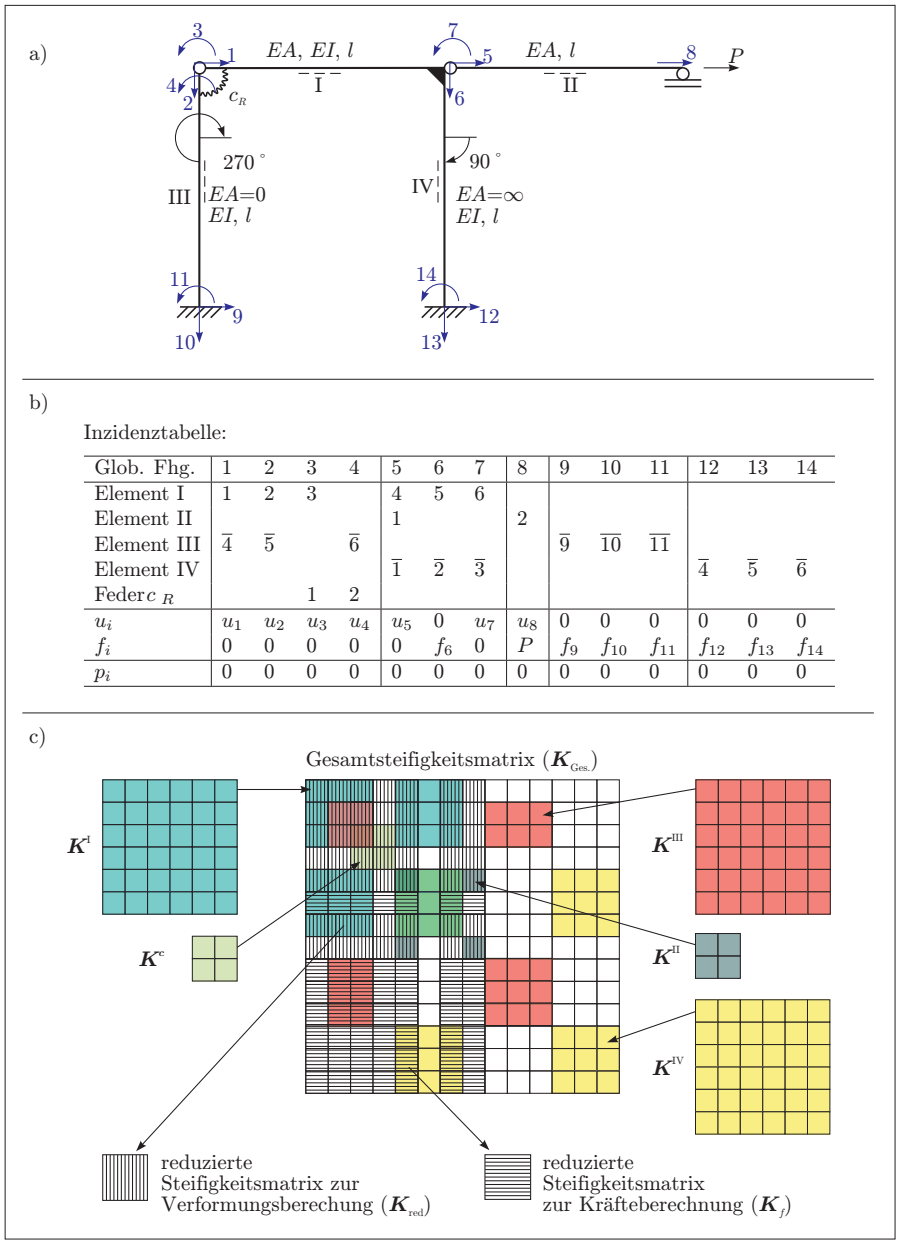


Abb. 3.12. Schematischer Ablauf der Berechnung. a) System mit globalen Freiheitsgraden, b) Inzidenztabelle und c) Steifigkeitsmatrizen.

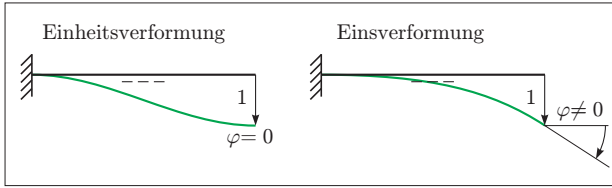


Abb. 3.13. Der Unterschied zwischen einer Einheitsverformung und einer eingprägten Einsverformung.

anzubringenden notwendigen Kräfte treten am Knoten selbst und an den betroffenen angeschlossenen Elementen auf. An den übrigen Elementen sind alle Kräfte gleich Null. Demgegenüber ist eine Einsverformung ($\delta = 1$) eine Belastung, an deren Abtrag alle Freiheitsgrade eines Systems, soweit der Kräftefluss dies erfordert, beteiligt sind. Der Unterschied zu diesen beiden Verformungsfiguren ist in Abbildung 3.13 an einem einfachen Beispiel und in Abbildung 3.15 an einem Rahmentragwerk dargestellt.

3.5.2 Grundlegende Polynome

Die Einheitsverformungen für Stab und Balken sind in Abbildung 3.14 dargestellt. Die Funktionen zu den Einheitsverformungen des Normalkraftstabes lauten:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= 1 - \frac{x}{l} \\ \varphi_2(x) &= \frac{x}{l}.\end{aligned}$$

Die Elemente der Steifigkeitsmatrix ergeben sich aus

$$k_{ij} = EA \cdot \int_0^l \varphi'_i \varphi'_j dx.$$

Beispiel

Es ist das Element k_{12} der Stabsteifigkeitsmatrix zu bestimmen. Die benötigten Funktionen und deren Ableitungen lauten

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= 1 - \frac{x}{l} &\Rightarrow &\varphi'_1(x) = -\frac{1}{l} \\ \varphi_2(x) &= \frac{x}{l} &\Rightarrow &\varphi'_2(x) = \frac{1}{l}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Eintrag in der Steifigkeitsmatrix zu

$$\begin{aligned}k_{12} &= EA \cdot \int_0^l \varphi'_1(x) \cdot \varphi'_2(x) dx \\ &= EA \cdot \int_0^l -\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{l} dx \\ &= EA \cdot \int_0^l -\frac{1}{l^2} dx \\ k_{12} &= -\frac{EA}{l}.\end{aligned}$$

Die Einheitsverformungsfunktionen (Hermite-Polynome) für den Biegebalken lauten (siehe Abbildung 3.14 b):

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$

$$\varphi_2(x) = -x + \frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}$$

$$\varphi_3(x) = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}$$

$$\varphi_4(x) = \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}$$

und die Steifigkeitsmatrix ergibt sich über die Gleichung

$$k_{ij} = EI \cdot \int_0^l \varphi_i''(x) \varphi_j''(x) dx$$

bzw. für $x/l = \xi$

$$k_{ij} = \frac{EI}{l^3} \int_0^1 \varphi_i''(\xi) \varphi_j''(\xi) d\xi.$$

Beispiel

Es ist das Element k_{11} der Balkensteifigkeitsmatrix zu bestimmen. Die benötigte Einheitsverformung mit den entsprechenden Ableitungen lautet

$$\varphi_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}$$

$$\varphi_1'(x) = -\frac{6x}{l^2} + \frac{6x^2}{l^3}$$

$$\varphi_1''(x) = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}.$$

Damit erhält man den Eintrag k_{11} in der Steifigkeitsmatrix zu

$$\begin{aligned} k_{11} &= EI \int_0^l (\varphi_1''(x))^2 dx \\ &= EI \int_0^l \left(\frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} \right)^2 dx \\ &= EI \int_0^l 144 \frac{x^2}{l^6} - 144 \frac{x}{l^5} + \frac{36}{l^4} dx \\ &= EI \cdot \left[48 \frac{x^3}{l^6} - 72 \frac{x^2}{l^5} + 36 \frac{x}{l^4} \right]_0^l \\ k_{11} &= \frac{12EI}{l^3}. \end{aligned}$$

Wenn die Einheitsverformungsfunktionen nicht in absoluten (x, l) , sondern in relativen Koordinaten $(\xi, 1)$ beschrieben werden, dann ...

- ... wird in den Bestimmungsgleichungen x/l durch ξ ersetzt.
- ... werden die Integrale für die Steifigkeitsbeiwerte über $d\xi$ von 0 bis 1 integriert.
- ... lautet der Vorfaktor vor dem Integral für den Stab nicht EA sondern EA/l und für den Balken nicht EI sondern EI/l^3 , siehe [20].

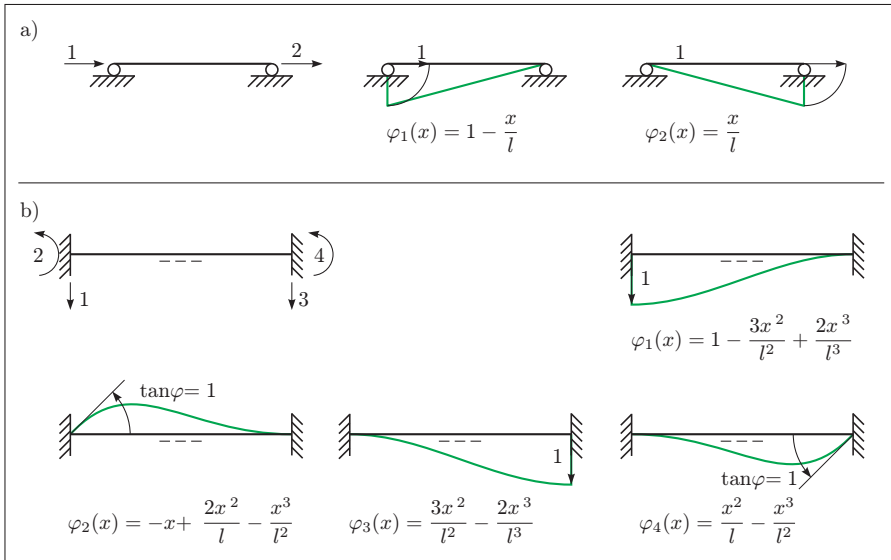


Abb. 3.14. Einheitsverformungen am a) Stab und b) Balken.

3.5.3 Für Einheitsverformungen benötigte Kräfte

Mithilfe der MVM können die für eine Einheitsverformung notwendigen Kräfte sehr einfach berechnet werden. Soll die Einheitsverformung für den Freiheitsgrad i erfolgen, so liefert die Multiplikation der Steifigkeitsmatrix des Systems mit dem zugehörigen Einheitsvektor $\mathbf{e}_i$ den Kraftvektor $\mathbf{f}_i$. Offensichtlich stehen in der i -ten Spalte der Steifigkeitsmatrix die Kräfte, die für die i -te Einheitsverformung anzutragen sind. Dies gilt sowohl am Element als auch am Gesamtsystem.

Beispiel: Balken

Für den Balken sind die Kräfte für die zweite Einheitsverformung zu bestimmen.

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2$$

$$\frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & -6l & -12 & -6l \\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2 \\ -12 & 6l & 12 & 6l \\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{l^3} \cdot \begin{bmatrix} -6l \\ 4l^2 \\ 6l \\ 2l^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6EI/l^2 \\ 4EI/l \\ 6EI/l^2 \\ 2EI/l \end{bmatrix}.$$

Beispiel: Tragwerk mit mehreren Elementen

Es sind die Kräfte für die Einheitsverformung am Freiheitsgrad 8 des dargestellten Systems zu bestimmen, und die Verformungsfigur ist zu skizzieren. In Abbildung 3.15 a ist das System dargestellt, in Abbildung 3.15 b sind die notwendigen Kräfte und die Verformungsfigur gezeigt. Die Kräfte ergeben sich aus der dritten Einheitsverformung des Elementes II und anteilig aus der ersten Einheitsverformung des

Elementes IV, da der Stab gedreht ist. Element I ist kräftefrei, weil es nicht am verschobenen Knoten angeschlossen ist. Element III ist angeschlossen, besitzt aber keinen vertikalen Freiheitsgrad, der für eine Kraftaktivierung notwendig wäre - somit verformt es sich zulässigerweise kräftefrei. In Abbildung 3.15 c ist schließlich die Verformungsfigur skizziert, mit der das System auf eine (hier nicht gefragte) Einsverformung (eingeprägte Zwangsverschiebung) reagieren würde.

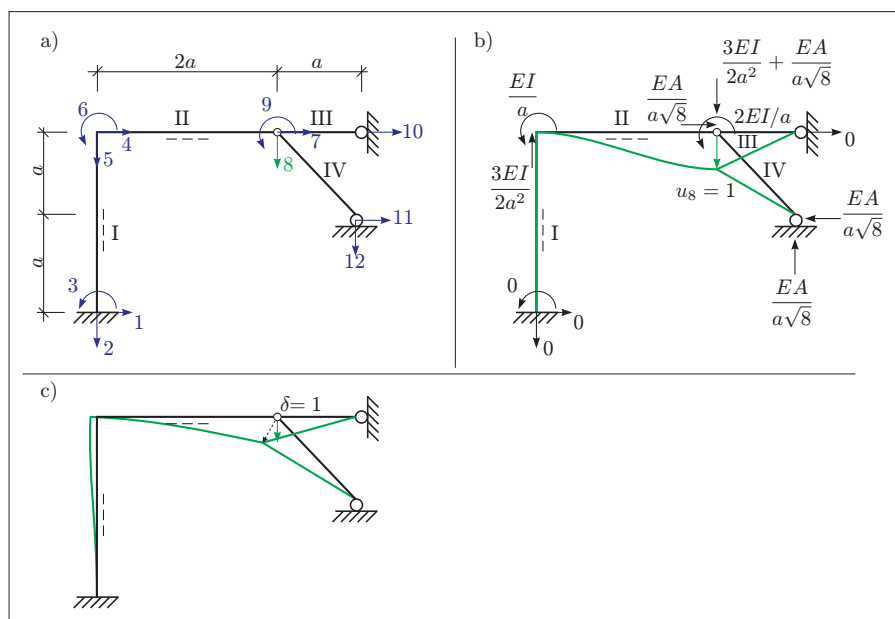


Abb. 3.15. Einheitsverformungen an einem Rahmensystem. a) System, b) Einheitsverformung und c) Einsverformung, ist hier nicht gefragt gewesen.

3.6 Substrukturtechnik

3.6.1 Hintergrund

Die Kondensation von Freiheitsgraden⁴ ist der Schlüssel zur Wirtschaftlichkeit numerischer Methoden. Denn ohne das Ausblenden von Freiheitsgraden müssten die Systeme komplett berechnet werden, gleichwohl dies gar nicht immer notwendig ist. Ein Verfahren, das für die statischen Systeme in Frage kommt, ist die Substrukturtechnik. Weitere Möglichkeiten, auch zur Behandlung von dynamischen Problemen, werden beispielsweise in [20] beschrieben.

⁴ D.h. das Wesentliche wird herausgefiltert.

Ein elastisches Tragwerk reagiert auf Belastung wie eine mehrdimensionale Feder. Die Idee ist nun, dass unbelastete Teile des Tragwerkes als Feder dargestellt werden können und somit nicht mehr berechnet werden müssen. Eine Struktur lässt sich so durch eine *Blackbox* mit maximal drei Freiheitsgraden ersetzen. Diese Freiheitsgrade können auch als Schnittstelle genutzt werden, wenn die ersetzte Struktur untersucht werden soll. Dazu sind die Verformungen an der Schnittstelle einfach als Belastung auf das Teilsystem anzusetzen. Dieses Verfahren wird verwendet, wenn Teilstrukturen separat, beispielsweise von verschiedenen Arbeitsgruppen, analysiert werden sollen.

3.6.2 Näherungslösungen

Bei einfachen Systemen lassen sich Ersatzfedern angeben durch

- $k_{\text{ges}} = \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} \right)^{-1}$ bei Reihenschaltung der Elemente und
- $k_{\text{ges}} = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ bei Parallelschaltung der Elemente.

Bei komplizierteren Strukturen liefern die einfachen Kombinationen keine exakten Ergebnisse mehr. Die Ermittlung der Steifigkeitsbeiwerte erfordert hier mehr Aufwand. Betrachten wir zunächst die Freiheitsgrade separat. Dazu wird an der Schnittstelle zur Substruktur eine Einslast je Freiheitsgrad angetragen. Es ergibt sich für jeden Freiheitsgrad eine Verformung. Der Kehrwert der Verformung ist die Steifigkeit bezüglich des Freiheitsgrades. Die resultierende Substruktursteifigkeitsmatrix enthält entkoppelte Steifigkeitswerte für die Freiheitsgrade.

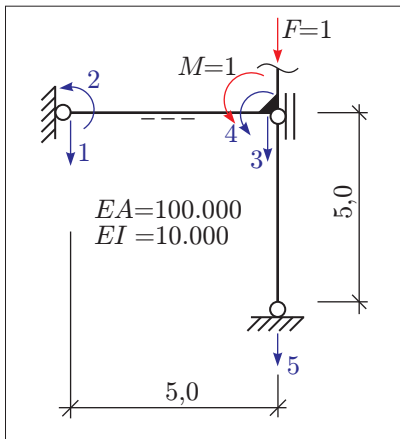


Abb. 3.16. Ersatz eines Systems durch Federn.

Beispiel: Näherungslösung

Für das gegebene System (Abbildung 3.16) soll eine genäherte Substruktursteifigkeitsmatrix bezogen auf die Freiheitsgrade 3 und 4 aufgestellt werden. Durch Aufbringen der vertikalen Last $F = 1$ werden nur die Steifigkeiten des vertikalen Stabes

aktiviert, denn der horizontale Stab überträgt keine Querkräfte. Somit ist das Element 1,1 der Substruktursteifigkeitsmatrix gerade

$$k_{\text{sub},11} = \frac{EA}{l} = \frac{100.000}{5,0} = 20.000.$$

Für den Lastfall $M = 1$ ergibt sich die Steifigkeit nicht sofort. Die unbekannten Verschiebungen geben an, dass sich die reduzierte Steifigkeitsmatrix aus den Freiheitsgraden 2, 3 und 4 zusammensetzt, wobei vom Balken die lokalen Freiheitsgrade 2, 3 und 4 und vom Stab der lokale Freiheitsgrad 1 beteiligt sind:

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} + \frac{EA}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8.000 & 2.400 & 4.000 \\ 2.400 & 20.960 & 2.400 \\ 4.000 & 2.400 & 8.000 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Der Verschiebungsvektor ergibt sich zu

$$\mathbf{u}^T = [-8,13 \cdot 10^{-5}; -1 \cdot 10^{-5}; 1,687 \cdot 10^{-4}].$$

Das Element 2,2 der Substruktursteifigkeitsmatrix folgt aus der Verschiebung u_4 zu

$$k_{\text{sub},22} = \frac{1}{u_4} = 5.926.$$

Damit ergibt sich die genäherte Substruktursteifigkeitsmatrix zu

$$\mathbf{K}_{\text{sub}} = \begin{bmatrix} 20.000 & 0 \\ 0 & 5.926 \end{bmatrix}.$$

Die exakte Lösung für die Substrukturmatrix ergibt sich dadurch, dass auch die Koppelung der Anschlussfreiheitsgrade beachtet wird, d.h. hier spielt der gerade erwähnte Unterschied zwischen einer Einheitsverformung und einer Einsverformung eine Rolle. Durch eine Kondensationsmatrix $\mathbf{T}$ wird die reduzierte Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\text{red}}$ des Systems auf die Freiheitsgrade an der Schnittstelle kondensiert. Die Elemente dieser Kondensationsmatrix haben zwei Aufgaben:

- Übernahme der Steifigkeiten an den Schnittstellenfreiheitsgraden selbst (Einheitsvektoren)
- Transformation der Steifigkeiten der übrigen Freiheitsgrade.

Die Vorgehensweise soll anhand eines Beispiels gezeigt werden.

Beispiel: Exakte Lösung

Für das schon bekannte System (Abbildung 3.16) soll nun die exakte Substruktursteifigkeitsmatrix aufgestellt werden:

$$\mathbf{B}_{\text{red}} \cdot \mathbf{T} = \tilde{\mathbf{K}}_{\text{sub}}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{4EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} + \frac{EA}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{\text{sub},11} & k_{\text{sub},12} \\ k_{\text{sub},21} & k_{\text{sub},22} \end{bmatrix}.$$

Die Koeffizienten β_1 und β_2 werden so bestimmt, dass die erste Zeile des Gleichungssystems erfüllt ist, also:

$$\frac{4EI}{l} \cdot \beta_1 + \frac{6EI}{l^2} \cdot 1 + 0 = 0 \Rightarrow \beta_1 = -\frac{3}{2l}$$

$$\frac{4EI}{l} \cdot \beta_2 + 0 + \frac{2EI}{l} \cdot 1 = 0 \Rightarrow \beta_2 = -\frac{1}{2}.$$

Die Transformationsmatrix ist nun bekannt, und die Substruktursteifigkeitsmatrix ergibt sich zu

$$\mathbf{K}_{\text{sub}} = \begin{bmatrix} \frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} + \frac{EA}{l} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{2EI}{l} & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{3}{2l} & -0,5 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{\text{sub},11} & k_{\text{sub},12} \\ k_{\text{sub},21} & k_{\text{sub},22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} - \frac{3EI}{l^3} & \frac{3EI}{l^2} \\ \frac{3EI}{l^2} & \frac{3EI}{l} \end{bmatrix}.$$

Mit den Angaben $EA = 100.000 \text{ kN}$, $EI = 10.000 \text{ kNm}^2$ und $l = 5,0 \text{ m}$ ergibt sich die Substruktursteifigkeitsmatrix zu

$$\mathbf{K}_{\text{sub}} = \begin{bmatrix} 20.240 & 1.200 \\ 1.200 & 6.000 \end{bmatrix}.$$

Gegenüber der Steifigkeitsmatrix der Näherungslösung sind nun auch die Elemente der Nebendiagonalen besetzt. Die Elemente der Hauptdiagonalen weichen im Vergleich der beiden Varianten aber nur geringfügig voneinander ab.

Werden mehrere Freiheitsgrade kondensiert, d.h. sind viele Weggrößen in der Reststruktur unbekannt, so nimmt die Zahl der β -Koeffizienten zu und die Berechnung von Hand wird zu aufwändig. Die Bearbeitung einer solche Aufgabe stellt für einen Computer jedoch kein Problem dar.

3.7 Einführung in das Drehwinkelverfahren

3.7.1 Grundlagen

Das DWV gehört zu den Weggrößenverfahren und stellt die einfachste und grundlegende Form dieser Verfahrensfamilie dar. Wie bei den Weggrößenverfahren üblich, arbeitet auch das DWV modular, also mit Elementen, und ist für die EDV-Berechnung verwendet worden.

Das Drehwinkelverfahren betrachtet nur Drehfreiheitsgrade und keine Verschiebungen. In Zeiten geringer Rechenkapazitäten ist dies von Vorteil gewesen, denn Verfahren wie die MVM und FEM benötigen in der Regel drei Freiheitsgrade je Knoten, das DWV jedoch nur einen und bedarf deshalb geringerer Rechenleistungen. Allerdings beschränkt sich die Anwendbarkeit hierdurch erheblich, denn Tragwerke mit deutlichen Verschiebungen werden nur unzureichend abgebildet. Die Einsetzbarkeit des Verfahrens reduziert sich auf unverschiebliche Rahmentragwerke und Durchlaufträger. Eine Einführung in das DWV nach der Theorie 1. Ordnung ist beispielsweise in [28] enthalten; darauf aufbauend sollte auch [25] herangezogen werden, denn dort wird die Modifikation für die Theorie 2. Ordnung beschrieben.

Die zugrunde liegende Idee ist die Berechnung von Verdrehungen infolge der Tragwerksbelastungen. Aus diesen Verformungen lassen sich Kraftgrößen ableiten. Die äußeren Lasten werden in äquivalente Knotenlasten umgewandelt. Als Grundelement wird der beidseitig eingespannte und somit geometrisch vollständig bestimmte Balken verwendet. Die Steifigkeitsmatrix eines Elementes ist vergleichsweise einfach aufgebaut. Sie ergibt sich aus der Wechselwirkung der Einheitsverformungen (Hermite-Polynome):

$$k_{ab} = EI \int_0^l \varphi_a(x) \varphi_b(x) dx$$

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Die Funktionen φ_a und φ_b sind dabei die zweiten Ableitungen der Einheitsverformungen des Balkens für die Verdrehungen am Stabanfang und am Stabende, d.h. für $\varphi_{a,b}$ werden die folgenden Gleichungen eingesetzt:

$$\varphi_a = \varphi_2''(x) = -\frac{6x}{l} + \frac{4}{l}$$

$$\varphi_b = \varphi_4''(x) = -\frac{6x}{l} + \frac{2}{l}.$$

Das DWV ist damit ein Teil der MVM, nur dass beim DWV ausschließlich die Drehfreiheitsgrade betrachtet werden.

3.7.2 Vorgehensweise

Das System ist in Tragwerkselemente zu untergliedern, und die Drehfreiheitsgrade φ sind zu definieren. Hierauf aufbauend werden die Zusammenhänge zwischen lokalen und globalen Freiheitsgraden festgestellt. Anschließend werden die Momentengleichgewichte an den einzelnen Knoten betrachtet. Dazu sind die Stabendmomente und Lastmomente zu addieren. Für ein Element (siehe Abbildung 3.17 a) gelten die Beziehungen

$$M_a = k_{aa}\varphi_a + k_{ab}\varphi_b + M_a^P$$

$$M_b = k_{ba}\varphi_a + k_{bb}\varphi_b + M_b^P$$

wobei k eine Steifigkeit, φ die Verdrehung am Stabanfang und -ende und M^P eine Momentenbelastung resultierend aus der Last auf dem Element ist.

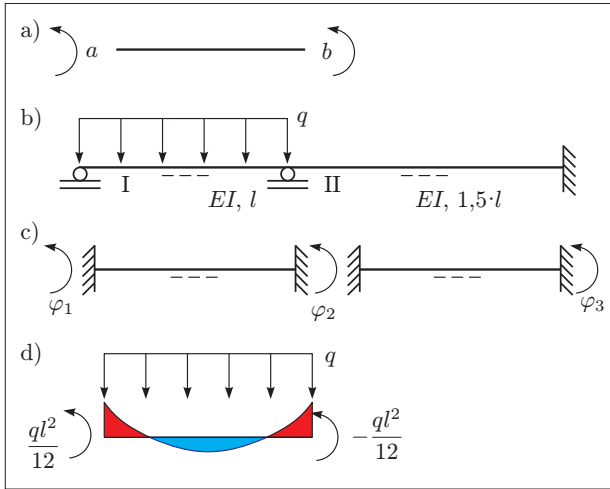


Abb. 3.17. Vereinfachtes Weggrößenverfahren: Das Drehwinkelverfahren. a) Element, b) System, c) Aufteilung des Systems und d) Momente aus Belastung am Element.

Die Momentenbetrachtung über das gesamte System (siehe Abbildung 3.17 b) liefert die Bestimmungsgleichungen für die Verformungen. Die Steifigkeitsmatrix des DWV entspricht der reduzierten Steifigkeitsmatrix der MVM, weil die fixierten Drehfreiheitsgrade zunächst von der Betrachtung ausgeschlossen sind:

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0 \Rightarrow k_{11}^I \varphi_1 + k_{12}^I \varphi_2 + M_1^P = 0 \\ \sum M_2 &= 0 \Rightarrow k_{21}^I \varphi_1 + k_{22}^I \varphi_2 + M_2^P + k_{11}^{II} \varphi_2 + \underbrace{k_{12}^{II} \varphi_3}_{=0} = 0. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt sich hieraus

$$\begin{bmatrix} k_{11}^I & k_{12}^I \\ k_{21}^I & k_{22}^I + k_{11}^{II} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1^P \\ M_2^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{m}_p = \mathbf{m}$$

mit dem Vektor der eingepprägten Balkenmomenten $\mathbf{m}$, der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$, dem Verformungsvektor $\mathbf{v}$ und dem Lastvektor $\mathbf{m}_p$ der eingepprägten Lasten. Die Gesamtsteifigkeitsmatrix kann auch über die schon bekannte Inzidenztabelle der MVM generiert werden.

Das vorliegende Gleichungssystem ermöglicht die Berechnung der unbekannten Verformungen. Anschließend werden die lokalen Verdrehungen an den Elementenden von den globalen Verdrehungen übernommen. Die Berechnung der Momente erfolgt über die Gleichgewichte an den Knoten. Die Verläufe innerhalb des Elementes ergeben sich aus der Überlagerung der Schnittgrößenverläufe unter der Last am Grundelement und den Randschnittgrößen aus der Berechnung.

Beispiel

Anhand konkreter Zahlenwerte soll mit dem in Abbildung 3.17 dargestellten System der Momentenverlauf ermittelt werden. Als Zahlenwerte werden angenommen: $EI =$

50.000 kNm^2 , $l_1 = 3 \text{ m}$, $l_2 = 4,5 \text{ m}$ und $q = 15 \text{ kN/m}$, siehe Abbildung 3.18 a. Für das Element I ergibt sich das Gleichungssystem

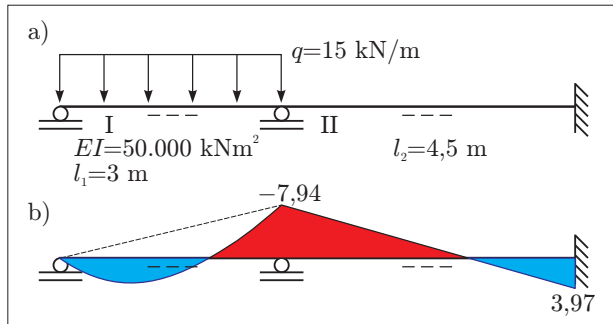


Abb. 3.18. a) System mit Daten und b) mit dem Drehwinkelverfahren berechneter Momentenverlauf.

$$\begin{bmatrix} M_a^I \\ M_b^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66.666, \bar{6} & 33.333, \bar{3} \\ 33.333, \bar{3} & 66.666, \bar{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11, 25 \\ -11, 25 \end{bmatrix}.$$

Für das zweite Element erhält man die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} M_a^{II} \\ M_b^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.444, \bar{4} & 22.222, \bar{2} \\ 22.222, \bar{2} & 44.444, \bar{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

wobei $\varphi_3 = 0$ ist, da die Verdrehung am rechten Auflager gesperrt ist. Das Momentengleichgewicht⁵ um den Knoten 1 und 2 liefert das lineare Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekannten Knotenverdrehungen φ_1 und φ_2

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0 \Rightarrow 66.666, \bar{6} \cdot \varphi_1 + 33.333, \bar{3} \cdot \varphi_2 + 11, 25 = 0 \\ \sum M_2 &= 0 \Rightarrow (33.333, \bar{3} \cdot \varphi_1 + 66.666, \bar{6} \cdot \varphi_2 - 11, 25) + \\ &\quad + (44.444, \bar{4} \cdot \varphi_2 + 22.222, \bar{2} \cdot 0) = 0. \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhält man

$$\begin{bmatrix} 66.666, \bar{6} & 33.333, \bar{3} \\ 33.333, \bar{3} & 11.111, \bar{1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11, 25 \\ 11, 25 \end{bmatrix}.$$

Die Lösung des Gleichungssystems lautet

$$\varphi_1 = -2,58088235 \cdot 10^{-4} \quad \text{und} \quad \varphi_2 = 1,78676471 \cdot 10^{-4}.$$

Das Ergebnis wird nun wieder in die Gleichungen auf Elementebene eingesetzt, um die Knotenmomentenwerte zu erhalten. Für das erste Element gilt

$$\begin{bmatrix} M_a^I \\ M_b^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66.666, \bar{6} & 33.333, \bar{3} \\ 33.333, \bar{3} & 66.666, \bar{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2,5809 \cdot 10^{-4} \\ 1,7868 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11, 25 \\ -11, 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7,9412 \end{bmatrix}$$

⁵ Da die Verdrehung φ_3 Null ist, wird das Momentengleichgewicht um Knoten 3 nicht benötigt.

Für das zweite Element erhält man die Gleichungen

$$\begin{bmatrix} M_a^{II} \\ M_b^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 44.444, \bar{4} & 22.222, \bar{2} \\ 22.222, \bar{2} & 44.444, \bar{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1,7868 \cdot 10^{-4} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,9412 \\ 3,9706 \end{bmatrix}.$$

Der Momentenverlauf, ermittelt über die Knotenwerte und die Elementlasten, ist in Abbildung 3.18 b dargestellt. Zu beachten sind die Vorzeichenkonventionen des DWV und der Balkentheorie.

3.7.3 Nichtlinearität beim DWV

Die Anwendung des DWV ist auch für Berechnungen nach Theorie 2. Ordnung möglich. Hier macht sich jedoch das Fehlen von Verschiebungsfreiheitsgraden bemerkbar, denn die Darstellung von Knickfiguren, einer Hauptanwendung der Theorie 2. Ordnung, gelingt nur schwer über die Verdrehungen. Gerade die Auslenkungen und resultierenden Momente sind aber entscheidend für die zusätzlichen Belastungen eines Tragwerkes. Auf eine weitere Betrachtung wird deshalb verzichtet.

3.8 Zum Merken

In diesem Kapitel wurde gezeigt, wie Berechnungen nach dem Weggrößenverfahren ablaufen. Wesentliche Komponente der Berechnung ist die Generierung der Elementsteifigkeitsmatrizen und der resultierenden Gesamtsteifigkeitsmatrix eines Systems. Die Steifigkeitsmatrizen sind vorgefertigte Strukturen, die über die geometrischen Eigenschaften (Abmessungen, Querschnitte, Materialien) des Tragwerks modifiziert werden. Mit der Substrukturtechnik wurde ein Verfahren vorgestellt, durch das der Rechenaufwand deutlich gemindert werden kann.

Die einzelnen Elemente einer Steifigkeitsmatrix ergeben sich aus der Überlagerung von Ableitungen der Einheitsverformungsfunktionen für die einzelnen Freiheitsgrade eines Tragwerksteils. Diese Überlagerung kann auch als Bewertung der Wechselwirkungsenergie der Freiheitsgrade infolge von Einheitsverschiebungen interpretiert werden. Diese gibt wiederum die Wechselwirkungsenergie der globalen Freiheitsgrade wieder. Über die Kräfte-Randbedingungen des Tragwerks können die unbekannten Wege bestimmt und nach ihrem Vorliegen die unbekannten Kräfte an den übrigen Freiheitsgraden berechnet werden.

Kern des Weggrößenverfahrens ist also die Energieberechnung, welche zu den Steifigkeitsmatrizen führt, im Zusammenspiel mit der Energiebilanzierung, welche sich am einfachsten im Federgesetz darstellt. Die Bezeichnung Weggrößenverfahren kommt also nicht nur daher, dass ein nicht unbeträchtlicher Aufwand zu treiben ist, bis man die Verformungen des Tragwerks bestimmt hat, sondern auch, weil ein wesentlicher Teil des Verfahrenskerns die energetischen Wechselwirkungen von Einheitsverformungen sind, also von Einheits-Weggrößen.

3.9 Fragerunde

1. Warum hat ein schräger Pendelstab im globalen Koordinatensystem vier Freiheitsgrade?
2. Aus welchem Grund müssen Elementsteifigkeitsmatrizen symmetrisch sein?
3. Wieso braucht man eine Nachlaufrechnung für die Schnittgrößen an den Tragwerksteilen zwischen den Knoten?
4. Was unterscheidet eine Einsverformung von einer Einheitsverformung?
5. Warum kann man nur unbelastete Tragwerksteile durch Ersatzsysteme exakt abbilden?
6. Was sind die Vor- und Nachteile des Drehwinkelverfahrens?
7. Kann man mit der MVM auch gekrümmte Bauteile berechnen? Wie würden Sie vorgehen? Wie würden Sie die Güte des Ergebnisses einstufen?
8. Eine Streckenlast q_z soll auf ein Balkenelement der Länge l wirken und die Gestalt einer vollständigen Sinuswelle haben. Wie lauten Belastungsfunktion q_z und die zugehörigen Festhaltekräfte (p -Vektor)?

Aufbauwissen

4.1 ...so geht es weiter

In diesem Kapitel sollen Themen behandelt werden, die nicht nur das Grundwissen der baustatischen Berechnungen voraussetzen, sondern auch unabhängig von der Berechnungsmethode (Weggrößenverfahren, Kraftgrößenverfahren) sind. Konkret geht es um:

- Symmetrie und Antimetrie,
- Rahmentragwerke,
- Passprobleme,
- vom Bernoulli-Balken und Pendelstab abweichende Tragwerksmodelle,
- nichtlineares Verhalten von Tragwerken und
- Polpläne.

4.2 Symmetrie und Antimetrie

4.2.1 Sinn dieser Übung

Die Berechnung von Systemen lässt sich erheblich vereinfachen, wenn Symmetrie oder Antimetrie¹ erkannt und ausgenutzt werden. Bei der Berechnung nach dem Weggrößenverfahren lässt sich z.B. die Anzahl der Freiheitsgrade von vornherein reduzieren. Dieses gilt auch für das Kraftgrößenverfahren, wobei hier zusätzlich durch Lastfallaufteilung die Möglichkeit der Vereinfachung auf weniger komplexe Lastfälle besteht.

¹ Auf ein ebenes, symmetrisches System bezogen: Kraft- und Verformungszustand, der bezüglich der Symmetrieachse spiegelbildlich ist, bei dem jedoch auf einer Seite die Wirkungsrichtungen umgekehrt sind.

4.2.2 Modellbildung

System vereinfachen

In einigen Fällen sind die Belastung und das Tragwerk selbst symmetrisch. Hier kann das System an der Symmetrieachse geteilt werden. An der Symmetrieachse erfährt das Tragwerk *keine* zur Symmetrieachse senkrechte Verschiebung, weshalb hier ein in dieser Richtung unverschiebliches Lager angeordnet wird, siehe Abbildung 4.1 b. Die Modellbildung ist vor allem bei FEM-Modellen wichtig, weil so die Zahl der Freiheitsgrade reduziert werden kann [20]. Bei den Kraftgrößenverfahren reduziert sich der Rechenaufwand, die Ergebnisse des einen Teilsystems müssen nur noch auf das andere Teilsystem übertragen werden.

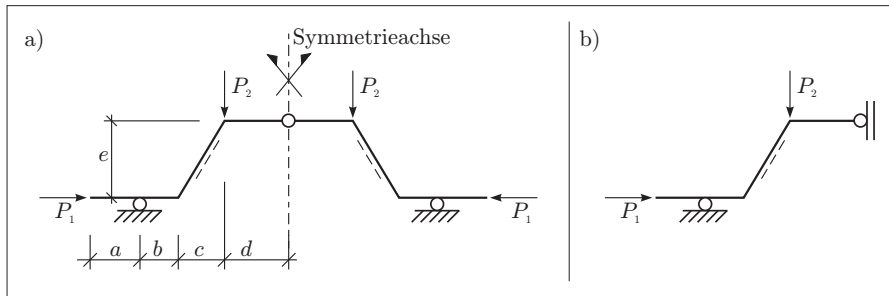


Abb. 4.1. a) Symmetrisches System und b) abgeleitetes vereinfachtes System.

Standardsysteme

Diese Systeme zeichnen sich dadurch aus, dass sie symmetrisch sind und eventuell die Ergebnisse für einzelne Lastfälle tabelliert sind. Hierzu gehören

- Durchlaufträger mit und ohne Gelenk(e),
- Gleichhöftige Rahmen.

Für einige Systeme ergibt sich aus der Symmetrie des Systems für bestimmte Lastfälle eine Verminderung der statischen Unbestimmtheit. Dies ermöglicht eine statisch bestimmte Berechnung, wie in Abbildung 4.2 a gezeigt wird.

Mitunter kann auch eine Zerlegung der Lasten helfen, die Symmetrie eines Systems ausnutzen zu können. Im Beispiel Abbildung 4.3 a wird die schräge Last in ihre horizontale und vertikale Last aufgeteilt. Für beide Teillasten kann mit verschiedenen vereinfachten Systemen gerechnet werden.

In manchen Fällen kann auch die statisch unbestimmte Berechnung vereinfacht werden, wie in Abbildung 4.3 b gezeigt. Zunächst kann die Symmetrie genutzt werden, um den Grad der statischen Unbestimmtheit um eins zu reduzieren und die verbleibenden beiden statisch Überzähligen können so gewählt werden, dass nur ein Hilfszustand berechnet werden muss. Die zugehörigen Gleichungen lauten:

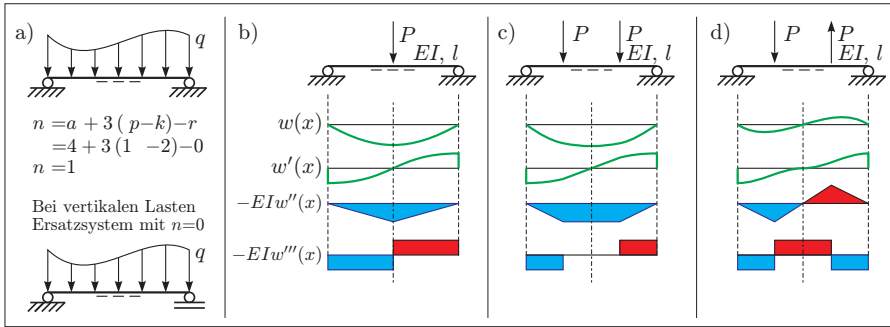


Abb. 4.2. a) Reduktion bei Vertikallast, b) symmetrische Einzellast, c) zwei symmetrische Einzellasten, d) zwei antimetrische Lasten.

$$\delta_{10} = \delta_{10,l} + \delta_{10,r} = \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_0}{EI} dx = \frac{1}{2} \cdot l \cdot \frac{P \cdot l}{4} = \frac{P \cdot l^2}{8}$$

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx = l \cdot 1^2 = l.$$

Die Elastizitätsgleichung lautet

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{P \cdot l}{8}.$$

Über folgende Gleichung wird der Endmomentenverlauf bestimmt:

$$M_{\text{end}} = M_0 + X_1 \cdot M_1 = M_0 - \frac{P \cdot l}{8} \cdot M_1.$$

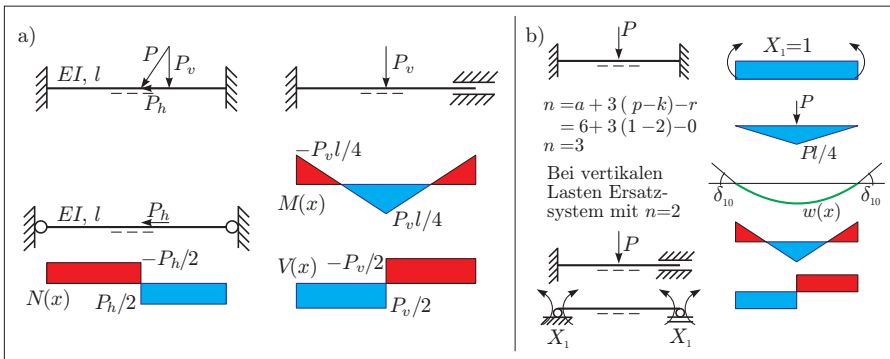


Abb. 4.3. a) System mit Lastaufteilung und b) Vereinfachung der statisch unbestimmten Berechnung.

Zum Merken

Symmetrie und Antimetrie führen immer auf die in Tabelle 4.1 dargestellten Beziehung zwischen den Ableitungen der Biegelinien und damit den Schnittgrößen.

Tabelle 4.1. Symmetrie und Antimetrie der Schnittgrößen und Verformungen.

Last	w	w'	$M = -EIw''$	$V = -EIw'''$	N
symmetrisch (s)	s	a	s	a	s
antimetrisch (a)	a	s	a	s	a

4.3 Rahmen

4.3.1 Allgemeines

Rahmen kommen in statischen Berechnungen sehr oft vor. Sie sind das Modell z.B. für Etagen in mehrgeschossigen Gebäuden, Dächer und Brücken. Bei der Berechnung gibt es einige Vereinfachungsmöglichkeiten, um den Rechenaufwand zu reduzieren. Dazu gehört, dass Teilprobleme als lineare Gleichungssysteme definiert werden, zum Beispiel die Ermittlung der Lagerreaktionen. Der klassische Weg hierfür wäre die Ermittlung der einzelnen Unbekannten *von Hand*. Dies ist jedoch fehleranfällig und in Zeiten der EDV auch nicht mehr aktuell. Eleganter ist es, die Arbeit dem Rechner zu überlassen, wobei die Fehlerursache auf die Aufstellung des linearen Gleichungssystems (LGS) beschränkt wird.

4.3.2 Lagerreaktionen

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie unterschiedlich die Berechnung von Hand und die Berechnung mittels Gleichungslöser funktioniert. Dazu wird ein Rahmentragwerk (Abbildung 4.4) betrachtet. Ziel ist die Berechnung der Auflagerreaktionen.

Über die Gleichgewichtsbedingungen ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \sum M_i &= 0 = A \cdot 6 - D \cdot 4 - 15 \cdot 4,5 - 10 \cdot 6 \cdot 3 = 6 \cdot A - 4 \cdot D - 247,5 \\
 \sum M_j &= 0 = 3 \cdot C - 1 \cdot D \quad \text{am Teilsystem Pendelstab rechts oben} \\
 \sum H &= 0 = B + D \\
 \downarrow \sum V &= 0 = -A - C + 15 + 10 \cdot 6 = -A - C + 75.
 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem wird nun als lineares Gleichungssystem dargestellt, wobei die Koeffizienten bei den Lagerreaktionen die Matrix $\mathbf{A}$, die Lagerreaktionen den Vektor $\mathbf{x}$ und die Skalare den Vektor der rechten Seite $\mathbf{b}$ bilden:

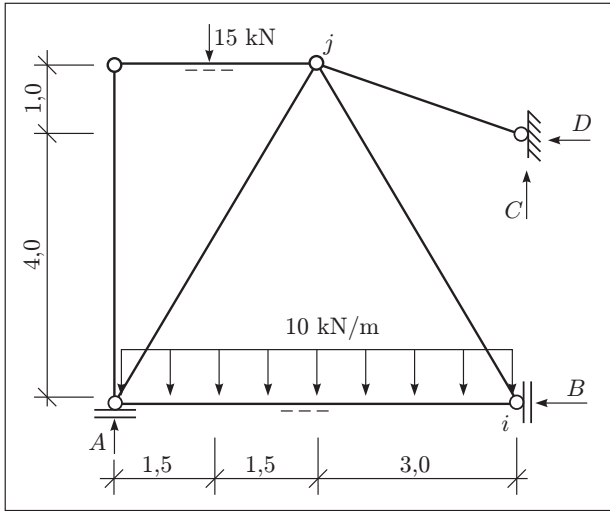


Abb. 4.4. Rahmen-tragwerk mit Lagerreaktionen.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 247,5 \\ 0 \\ 0 \\ 75 \end{bmatrix}.$$

Der Gleichungslöser liefert:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 63,75 \\ -33,75 \\ 11,25 \\ 33,75 \end{bmatrix}.$$

Zum Vergleich folgt nun die Berechnung der Lagerreaktionen von Hand. Aus dem zweiten Momentengleichgewicht erhält man

$$3C = D \quad \Rightarrow \quad C = \frac{D}{3}.$$

Durch einsetzen in das vertikale Gleichgewicht und Multiplikation des gesamten Ausdrucks, erhält man die Gleichung

$$A + \frac{D}{3} = 75 \mid \cdot 6 \quad \Rightarrow \quad 6A + 2D = 450.$$

Subtrahiert man davon die Gleichung aus dem Momentengleichgewicht am Gesamtsystem, so liefert das das Ergebnis für die Auflagerkraft D :

$$\begin{array}{rcl} 6A + 2D = 450 & \Big| & - \\ 6A - 4D = 247,5 & \Big| & - \\ \hline \Rightarrow 6D = 202,5 & \Rightarrow & D = 33,75. \end{array}$$

Setzt man das Ergebnis in die erste Gleichung ein, so erhält man für C

$$C = \frac{D}{3} \Rightarrow C = 11,25.$$

Über die Summe aller vertikalen Lasten bestimmt sich A zu

$$A = 75 - C \Rightarrow A = 63,75.$$

Als letzter Rechenschritt wird die Auflagerkraft B über die Summe aller horizontalen Kräfte bestimmt:

$$B + D = 0 \Rightarrow B = -33,75.$$

Der Aufwand für die Berechnung des linearen Gleichungssystems ist von Hand offensichtlich größer als mit dem Gleichungslöser. Allerdings muss man hierzu mit dem Programm oder Taschenrechner vertraut sein.

Ein vergleichbares Problem ergibt sich im Übrigen bei der Betrachtung der Kräfte innerhalb eines Rahmens. Auch hier können die Kräfte durch ein Gleichungssystem beschrieben und – mittels Gleichungslöser – elegant und schnell berechnet werden.

An dieser Stelle soll ein Hinweis auf die Eigenschaften lineare Gleichungssysteme folgen. An einem (Teil-)System können immer nur drei voneinander linear unabhängige Gleichungen aufgestellt werden. Jede weitere über ein Kräftegleichgewicht aufgestellte Gleichung enthält keine neuen Informationen und kann somit nicht zur Lösung des Gleichungssystems beitragen. Sind an einem (Teil-)System also mehr als drei unbekannte Kräfte vorhanden, so müssen weitere Teilsysteme zur Lösung herangezogen werden.

4.3.3 Hilffsysteme bei Rahmen

Rahmen zeichnen sich dadurch aus, dass statisch überzählige Kräfte im System bleiben können und Lagerreaktionen in diesem Fall nicht auftreten. In der Regel gilt, dass frei geschnittene Kräfte und Momente im Tragwerk verbleiben. Wenn hingegen Lagerreaktionen als statisch Überzählige verwendet werden, dann ergeben sich an den übrigen Auflagern Reaktionen (siehe Abbildung 4.5).

4.4 Passprobleme

Ein Passproblem tritt auf, wenn von den vorbestimmten Maßen der einzelnen Bauteile abgewichen wird. Ist das Gesamtsystem statisch bestimmt, so bleibt diese Ungenauigkeit in der Regel ohne größere Folgen. Wenn das Gesamttragwerk jedoch statisch unbestimmt ist, so folgen aus dieser Passungenauigkeit Schnittkraftverläufe, so genannte Eigenspannungen². Das Bauteil passt nicht an den vorbestimmten Platz und muss unter Kraftaufwand eingebaut werden.

Bei der Betrachtung eines Tragwerks muss ein Passproblem berücksichtigt werden, da dies einen Einfluss auf die Bemessung haben kann. Der Zusammenhang

² Eigenspannungen sind mechanische Spannungen, die in einem Körper herrschen, an dem keine äußeren Kräfte angreifen und der sich im thermischen Gleichgewicht befindet.

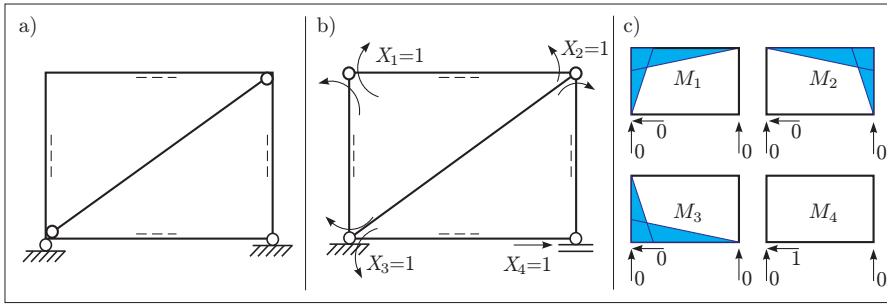


Abb. 4.5. Bei geschlossenen Rahmen bleiben die Kräfte im Tragwerk, es treten keine Lagerreaktionen auf. a) System, b) statisch Überzählige und c) zugehörige Lagerreaktionen und Momentenflächen.

zwischen der Passungenauigkeit und den resultierenden Kraftverläufen kann über die Elastizitätsgleichung erfasst werden.

$$0 = \delta_{10} + X \cdot \delta_{11}.$$

Dabei ist die statisch überzählige Kraft X so zu wählen, dass sie der benötigten Kraftart entspricht, um das System passgenau zu machen. Die Verformung δ_{10} ist dabei gerade die Passungenauigkeit des Systems und vorzeichengerecht anzusetzen, denn für die Betrachtung des Passproblems greifen keinerlei andere Lasten im Lastzustand an. Die Größe δ_{11} ist die Verformung am statisch bestimmten System unter der Einslast. Um sowohl die Verformungen des Rahmens (Biegung) als auch die des Spanngliedes (Längsdehnung) dabei zu erfassen, werden alle relevanten Terme der Arbeitsgleichung verwendet.

Anhand eines Beispiels soll die Vorgehensweise verdeutlicht werden.

Beispiel

Bei einem Tragwerksrahmen (Abbildung 4.6) steht die rechte Stütze schief. Der untere Träger des Rahmens würde so nicht passen. Deshalb soll mittels Spanngurt der Rahmen so vorgespannt werden, dass die Ungenauigkeit beseitigt ist. Zu bestimmen ist zunächst die Verformung am statisch bestimmten System unter Einslast ($F = 1$). Daraus kann die Vorspannkraft F , unter Einbeziehung der Passungenauigkeit von 10 cm, ermittelt werden. Die Verschiebung im Lastzustand soll demnach $\delta_{10} = -0,10$ m betragen.

Die Überlagerung besteht aus Normalkraft- (Zugband und oberer Riegel) und Biegeanteilen (Rahmen). Im Beispiel ergibt sich aus dem Hilfszustand (1-Last) die Verformung. Die Systemdaten sind der Abbildung 4.6 zu entnehmen. Für die Rechnung gilt: $EI = 5.229 \text{ kNm}^2$, $EA_{\text{Spann}} = 102.900 \text{ kN}$ und $EA_{\text{Riegel}} = 1.134.000 \text{ kN}$.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int_0^l \frac{M_1 M_1}{EI} dx + \int_0^l \frac{N_1 N_1}{EA} dx \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{3} (-6)^2 \cdot 6 + 1 (-6)^2 \cdot 12}{5.229} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 12}{102.900} + \frac{(-1) \cdot (-1) \cdot 12}{1.134.000} \\ &= 0,110155 + 0,000117 + 0,000011 = 0,1103 \text{ m/kN} \end{aligned}$$

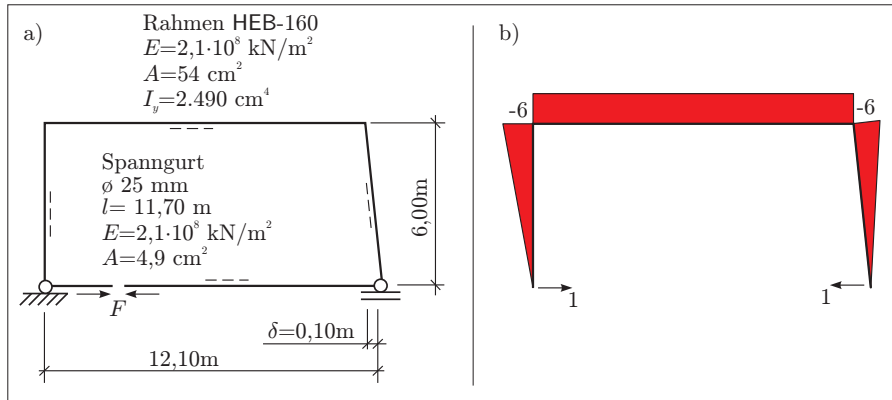


Abb. 4.6. Passproblem: a) System und b) Momente aus Hilfszustand.

Es ist deutlich zu erkennen, dass der Biegeanteil den maßgebenden Anteil zu dieser Verformung beisteuert. Die Verformungsanteile des Spanngliedes und des oberen Riegels wären in diesem Fall zu vernachlässigen. Die Vorspannkraft F ergibt sich unter Verwendung der beiden Verformungsgrößen zu

$$F = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = \frac{0,1}{0,11} = 0,91 \text{ kN}.$$

In diesem Fall ist das System so biegeweich, dass schon eine geringe Vorspannkraft ausreicht, um das System wieder *hinzubiegen*.

4.5 Jenseits von Bernoulli

Die nun vorgestellten Tragelemente werden nicht so häufig eingesetzt wie Bernoulli-Balken und Pendelstab. Jedoch sollte jeder im konstruktiven Ingenieurbau Arbeitende die Funktionsweise kennen.

Der Schubträger ist neben dem klassischen Bernoulli-Biegebalken ein gebräuchliches Modell für den Abtrag von Querlasten auf stabförmige Tragwerkselemente. Der gebettete Balken findet in der Modellierung von Streifenfundamenten seine Hauptanwendung.

Das urtümlichste – aber nicht einfachste – Tragelement ist sicherlich das Seil, dem hier auch ein Abschnitt gewidmet ist.

4.5.1 Langerscher Balken

Ein Stabbogen und ein Balken werden über Stäbe (Hänger) miteinander verbunden. Die aus dem Bogen entstehenden horizontalen Lagerkräfte werden über den Balken axial abgetragen. Besitzt der Träger selbst im Feld ein Gelenk, so ist das System statisch bestimmt. Der Langersche Balken eignet sich besonders gut zum Abtrag von verteilten Lasten und wird deshalb bei vielen mittelgroßen Brücken als Tragsystem

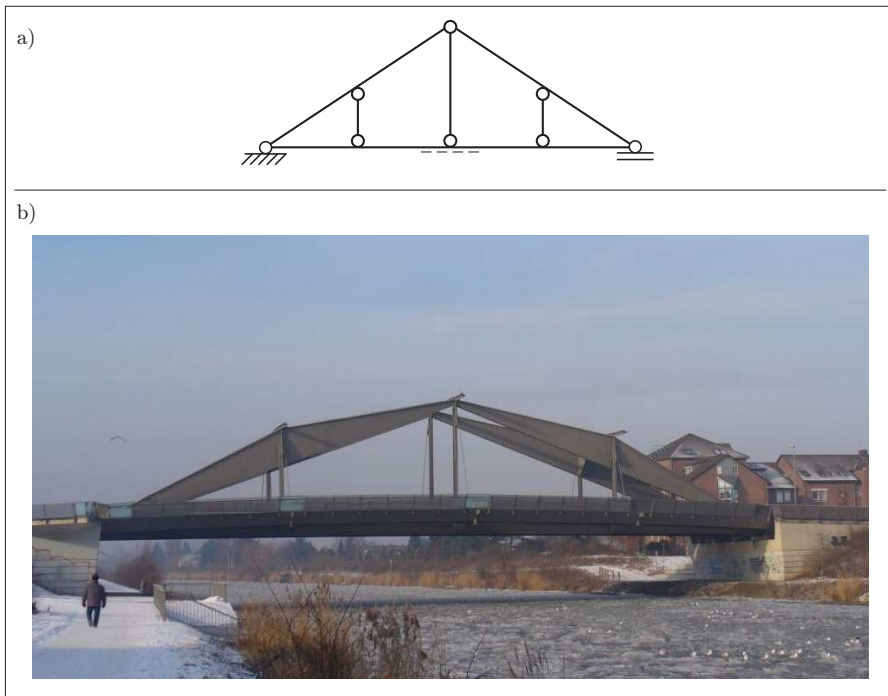


Abb. 4.7. Langerscher Balken. a) Statisches System und b) Straßenbrücke Eulenkamp/Hannover.

verwendet. Einige Beispiele für Brücken neueren Baudatums, die nach dem Prinzip Stabbogen mit angehängtem Balken funktionieren, sind in [27] zu finden. In Abbildung 4.7 ist eine sehr übersichtliche Konstruktion einer solchen Brücke dargestellt. Sehr viel filigraner sieht die in Abbildung 4.8 dargestellte Brücke aus, bei der die Stabbögen als Gitterträger ausgeführt worden sind.

4.5.2 Vierendeelträger

Dieser Träger besteht aus zwei Gurten sowie senkrecht dazu angeordneten Verbindungselementen. Die Viereckmaschen – es fehlen die Diagonalen – sind deshalb nicht beweglich sondern tragfähig, weil die einzelnen Stäbe biegesteif miteinander verbunden sind. Der Träger funktioniert also als Aneinanderreihung von Rahmen, die über biegesteife Ecken die notwendige Stabilität erzeugen. In Abbildung 4.9 ist eine Brücke gezeigt, bei der Vierendeelträger und zwei Langerschen Balken kombiniert wurden. Die Lasten aus dem Straßenverkehr werden über die Langerschen Balken (außen) abgetragen, die mittigen Lasten aus dem Straßenbahnverkehr über die Vierendeelträger.

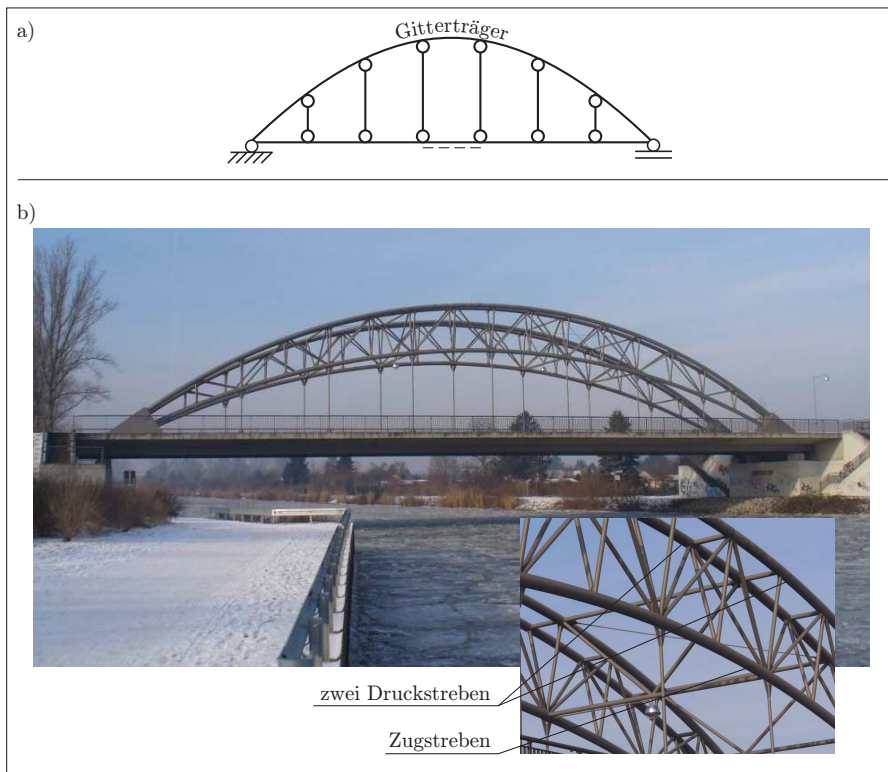


Abb. 4.8. Langerscher Balken, Gitterträger als Stabbögen. a) Statisches System und b) Straßenbrücke Am Listenhofe/Hannover.

4.5.3 Gebetteter Balken

Ein auf einem elastischen Medium aufliegender Balken verhält sich unter Belastung anders, als ein nur an den Rändern gelagerter. Die Verformungen von Setzungsmulde und Balken sind im Balkenbereich identisch. Zusätzlich verformt sich das Lagerungsmedium auch außerhalb des Balkens.

Ein mögliches statisches System ist das so genannte *Matratzenmodell*. Hierbei wird der elastische Bettungshalbraum durch einzelne Federn modelliert. Vernachlässigt wird hierbei die Tiefenwirkung der Verformung, also die Auswirkungen auf die tieferen Bodenschichten. Die Steifigkeiten der Federn wird entsprechend des Lagerungsmediums, also in der Regel des anstehenden Bodens, gewählt. Eine entsprechende Figur ist in Abbildung 4.10 a dargestellt.

Die Setzungsmulde verläuft in der Realität stetig (Abbildung 4.10 b), wenn sich der Boden in einem elastischen Zustand befindet. Für diesen Fall wird das Steifizifferverfahren verwendet. Die Berechnung erfolgt in der Regel unter Beachtung eines Einzugsbereiches, der deutlich größer als das Fundament ist, wobei die Weite so gewählt werden muss, dass an den Rändern keine Auswirkungen der Belastung

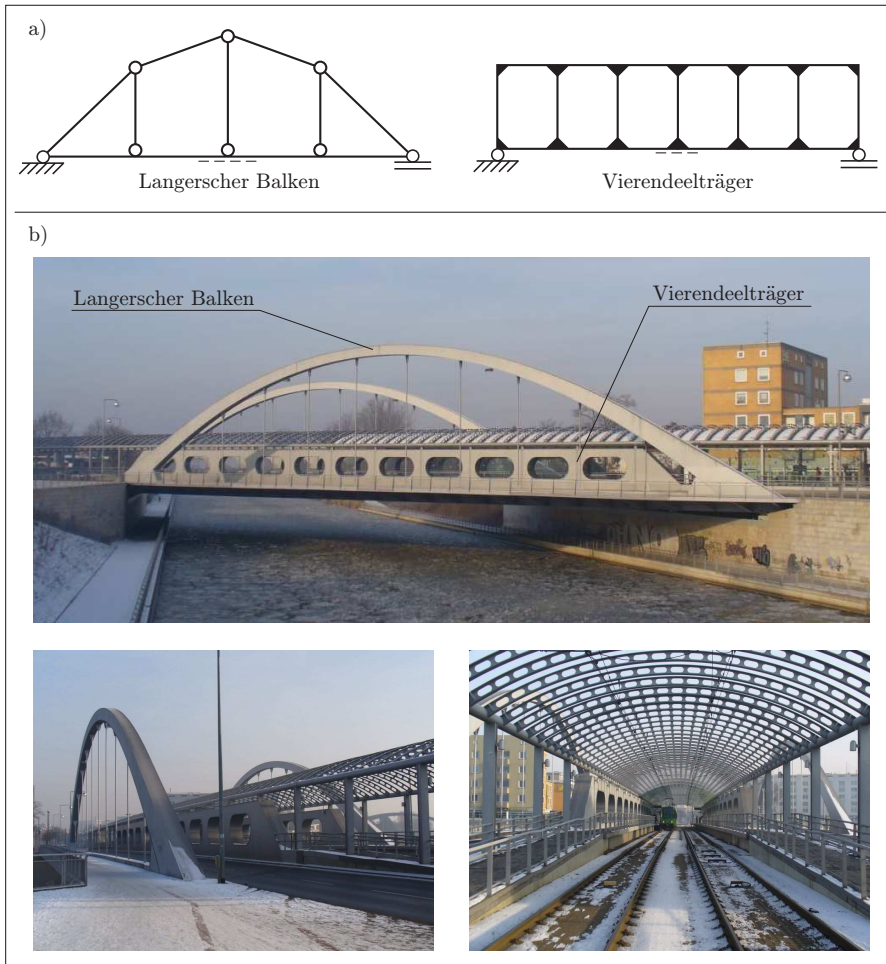


Abb. 4.9. Vierendeelträger und Langerscher Balken. a) Statische Systeme und b) Kfz- und Straßenbahnbrücke Podbielskistraße/Hannover.

gen mehr erkennbar sind. Auf Grund der Komplexität werden Modelle nach der Finite-Elemente-Methode oder Randelementemethode eingesetzt. Die verwendete Bodenkenngröße ist je nach Vorversuch der Steifemodul E_s [kN/m²] oder der mittlere Zusammendrückungsmodul E_m [kN/m²]. Sie wird direkt für die diskretisierten Elemente als Materialkennwert angesetzt und ist nicht von der Fundamentbreite abhängig.

Wird ein Bruch des Bodens an den Fundamentenden zugelassen (Abbildung 4.10 c), so verformt sich der Boden plastisch und trägt weit weniger Last im Bereich außerhalb des Balkens ab. Diese Annahme führt auf das Steifemodulverfahren. Hierbei werden nur der Balken und seine direkte Lagerung betrachtet. Die entsprechende

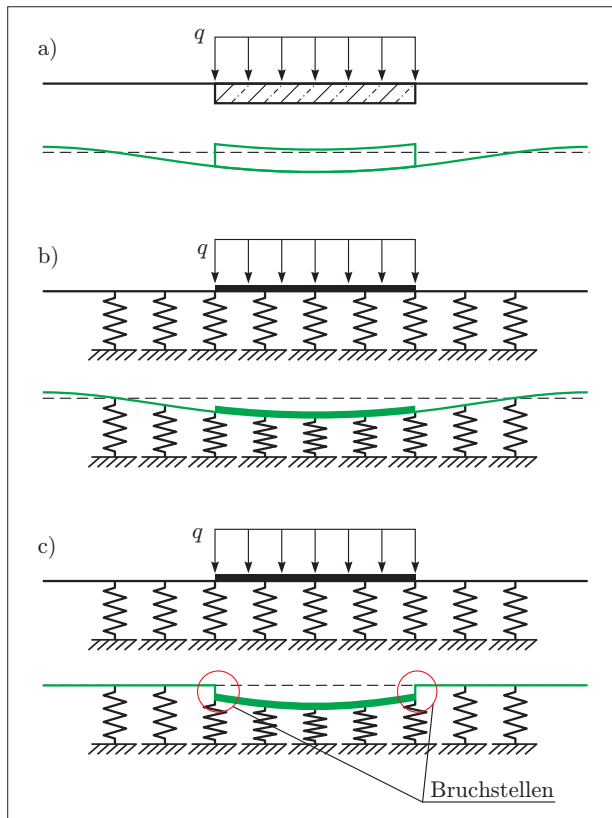


Abb. 4.10. Ausbildung einer Setzungsmulde. a) Sachverhalt als Schemazeichnung, b) Modell nach Steifizifferverfahren und c) Modell nach Bettungszifferverfahren.

Differentialgleichung kann lokal formuliert werden und ergibt sich zu

$$q(x) = EI \cdot w^{IV}(x) + c \cdot w(x).$$

Die Steifigkeit c ergibt sich aus dem Produkt von Bettungsmodul k_s [kN/m³] und Balkenbreite b [m]. Hierbei ist der Bettungsmodul $k_s = \sigma_0/s$, wobei σ_0 die mittlere Sohlspannung infolge aufgebrachtter Last im Versuch und s die Auflagebreite im Versuch ist. Früher wurde der Bettungsmodul als Bettungsziffer oder Steifeziffer C_b bezeichnet. Weitere Informationen zu geotechnischen Aspekten sind [17] und [18] zu entnehmen.

Gebettete Balken werden bei grundbaulichen Aufgaben betrachtet. Ihre mathematische Behandlung ist nicht ganz unaufwändig, und wir überlassen es dem Eigenstudium, sich mit diesem Thema auseinanderzusetzen. Es wird deshalb an dieser Stelle auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen, z.B. [14], [17], [18], [19] und [24].

4.5.4 Schubträger

Der Schubträger nach der Theorie von Timoschenko realisiert seine Tragwirkung über die Schubspannungen zwischen den einzelnen Elementen. Diese verformen sich

selbst nicht, so dass die Verformung ausschließlich über Gleitung geschieht. Schubträger tragen Lasten hauptsächlich über Schubspannungen ab. Ihr eigentliches Erkennungszeichen ist, dass die Verformungen durch parallele Verschiebung der Elemente gegeneinander geschehen. Der Biegebalken hingegen verformt sich aufgrund der Verdrehung einzelner Elemente.

Als Beispiel für Schubträger wird oft auch der Vierendeelträger betrachtet. Dieser trägt Lasten innerlich jedoch über Biegung (Rahmen) ab.

Der Schubträger ist damit sowohl als Tragwerkssystem wie auch als einelementiges Bauteil, wie beispielsweise Balken, Stab oder Seil, anzusehen.

Aus Abbildung 4.11 sind die mit dem Schubmodul G , der Gleitung γ und der Schubspannung τ folgende Beziehungen ableitbar:

$$\begin{aligned} G \cdot \gamma &= \tau \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{dw}{dx} = w'(x) \\ &\Rightarrow G \cdot w' = \tau \\ V(x) &= \tau \cdot A_s = GA_s \cdot w'(x) \\ -\frac{dV}{dx} &= q(x). \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung für den Schubträger lautet damit

$$-GA_s \cdot w''(x) = q(x).$$

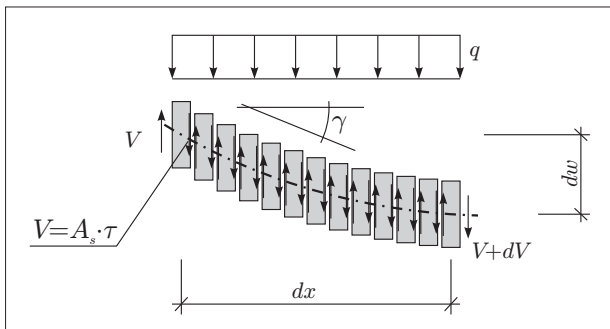


Abb. 4.11. Ableiten der Elemente im Modell des Schubträgers.

4.5.5 Seil

Seile werden verwendet, wenn im Wesentlichen Zugkräfte abgetragen werden müssen. Zudem bieten Seile eine gewisse Flexibilität (geringe Biegesteifigkeit), so dass Tragwerke eine deutliche Elastizität erhalten – wichtig bei dynamisch beanspruchten Bauwerken wie Brücken in Erdbebenregionen.

Bei Beanspruchung in Seilrichtung entspricht das Tragverhalten dem Zugstab, Druckkräfte können nicht aufgenommen werden. Die Biegesteifigkeit, die bei Seilen von großen Durchmessern zweifelsohne vorhanden ist, wird im Modell nicht angesetzt. Unter Querbelastrung ergibt sich die Tragwirkung aus der Kombination von

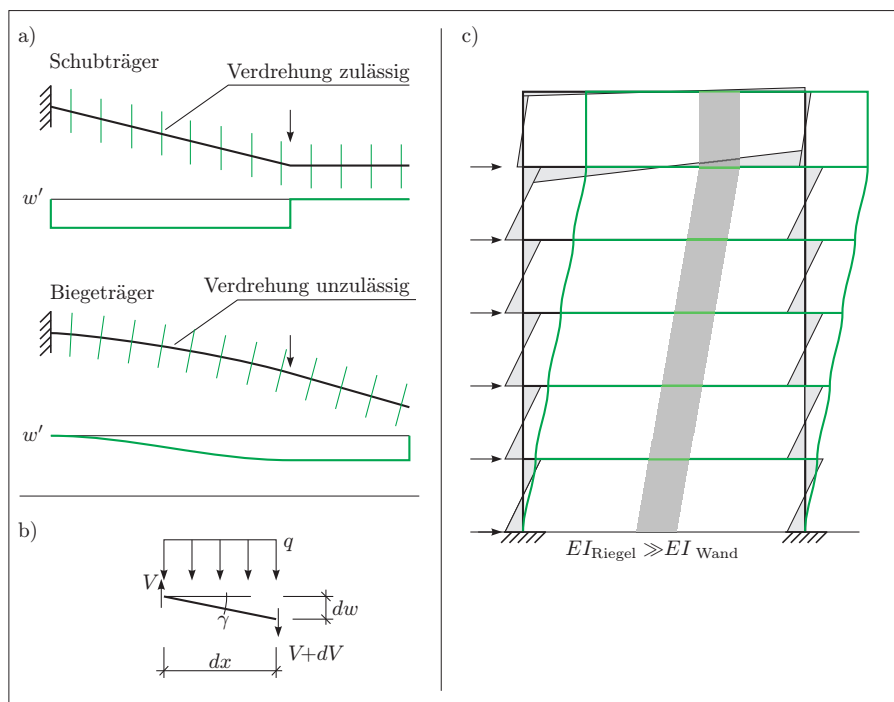


Abb. 4.12. a) Schub- und Biegeträger, b) differentielles Element und c) Stockwerksrahmen.

Durchhang und Zug. Das Seil als Tragelement lässt Knicke in der Verformungsfigur zu.

In Abbildung 4.13 a sind die Schnittgrößen des Seils dargestellt:

- Spannkraft $H(x)$,
- Querkraft $V(x)$ und
- Seilkraft $S(x)$ (immer tangential zur Biegelinie).

Aus den Betrachtungen am Seilelement (Abbildung 4.13) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \downarrow \sum V &= 0 = p\Delta x + \Delta V \\
 -\frac{dV}{dx} &= p \\
 \frac{V(x)}{H(x)} &= \tan \varphi = w'(x) \\
 \Rightarrow V(x) &= H(x) \cdot w'(x).
 \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung lautet nun

$$-H(x) \cdot w''(x) = p.$$

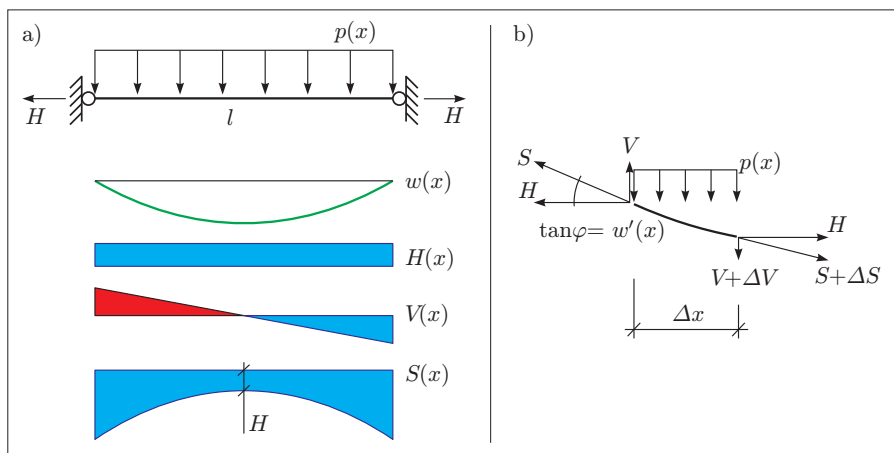


Abb. 4.13. a) Seil mit Schnittgrößen und b) Differentielles Seilelement.

Entscheidend für die Seiltragwirkung ist die Spannkraft H , weil sie zusammen mit der Seilkrümmung die Seilsteifigkeit bildet. Für eine konstante Streckenlast ergibt die Lösung der Differentialgleichung:

$$w(x) = \frac{p}{2H} \cdot x(l-x)$$

$$V(x) = \frac{p}{2}(l-2x)$$

$$S(x) = \sqrt{H^2(x) + V^2(x)} = H\sqrt{1 + (w'(x))^2}$$

$$H = \frac{pl^2}{8f} \quad \text{mit } f = \text{Stich, bzw. Absenkung in Feldmitte.}$$

Die Längenänderung des Seils kann über die Gleichung

$$\Delta l = \frac{8f^2}{3l}$$

berechnet werden, so dass sich die Gesamtseillänge unter Last zu

$$l_0 = l + \Delta l = l \left(1 + \frac{8f^2}{3l^2} \right)$$

bestimmt. Diese Gleichung gilt allerdings nur näherungsweise für flach gespannte Seile.

4.6 Nichtlineares Verhalten bei Stabtragwerken

4.6.1 Bananas and Nonbananas

Die Berechnung von Stabtragwerken erfolgt in der Regel gemäß der Theorie 1. Ordnung, also der Betrachtung von Schnittgrößen am unverformten System. Die Verformungen werden, z.B. bei der Matrizenverschiebungsmethode, oft auch bestimmt,

gehen jedoch in die Betrachtungen nicht wieder ein. Viele Aufgaben der Praxis können auf diese Weise gelöst werden. Deshalb werden Berechnungen nach höherer Ordnung, also unter Einbezug von Verformungen, nur selten durchgeführt.

Das bedeutet nicht, dass alle baustatischen Probleme derart einfach gelöst werden können. Das Gegenteil ist der Fall. Gerade bei komplexeren Systemen werden nichtlineare Effekte maßgeblich für die Bemessung. Zur Veranschaulichung der Aufteilung von linearen und nichtlinearen Problemen gibt es einen schönen Vergleich: *Classifying the world into linear and nonlinear systems seemed a bit like classifying the world into bananas and nonbananas.*

Belastungen führen zu Verformungen des Systems. Jedoch ist nicht jede Verformung relevant. Zudem entstehen bei genauer Betrachtung diverse Belastungen im System, die nach Theorie 1. Ordnung gar nicht vorliegen. Z.B. kommt es vor, dass Stützen infolge Tragwerksverformung nicht mehr mittig sondern außermittig belastet werden, was dann zu Biegemomenten in den Stützen führt.

Nichtlineares Verhalten bezieht sich aber nicht nur auf die durch Systemverschiebungen entstehenden Änderungen in den Schnittgrößen. Auch die Werkstoffe, aus denen ein Tragwerk aufgebaut ist, zeigen ein nichtlineares Verhalten. Unter Beachtung der einwirkenden Spannungen und der Gegenüberstellung zu den Fließgrenzen ergibt sich bei Aufbringen von großen Belastungen ein mitunter völlig anderes Tragverhalten als für kleine Einwirkungen.

Die nichtlinearen Probleme gliedern sich im Wesentlichen auf in:

- Schnittgrößenermittlung am verformten System (Theorie 2. Ordnung)
- Fließgelenkbildung (Traglastverfahren, Theorie 1. Ordnung, nichtlineares Werkstoffverhalten) und
- Stabilitätsprobleme (Theorie 2. Ordnung).

4.6.2 Schnittgrößenermittlung am verformten System

Die Berechnung der Schnittgrößen am verformten System ist in der Regel ein Iterationsprozess und wird deshalb mittels EDV durchgeführt. Des Verständnisses wegen soll hier jedoch ein Iterationsschritt von Hand durchgeführt werden. Am System, gezeigt in Abbildung 4.14, soll der Momentenverlauf im verformten Zustand bestimmt werden.

Im Abbildung 4.14c und 4.14d werden Hilfszustände betrachtet. Diese dienen der Messung der horizontalen Verschiebungen am Lastangriffspunkt und am rechten Lager. Durch die horizontale Verformung des Tragwerkes ergibt sich eine größere Spannweite und die Biegemomente nehmen zu. Besonders beachtlich ist, dass der linke Stil, der nach Theorie 1. Ordnung keine Biegung erfährt, nach Theorie 2. Ordnung von einem, wenn auch geringen, Biegemoment beansprucht wird. Mit der um die Verschiebungen veränderten Geometrie des Tragwerks werden die Schnittgrößen neu berechnet. Die Verformungen und die Momentenänderungen sind so gering, dass ein zweiter Iterationsschritt nicht notwendig erscheint. Die Verformungen ergeben sich aus:

$$\begin{aligned} \delta_{h1} &= \frac{2 \cdot 13, \bar{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (4 + 2 \cdot 2, \bar{6}) + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \{13, \bar{3} \cdot (2 \cdot 2, \bar{6} + 1, \bar{3})\}}{20.000} \\ &\quad + \frac{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \{6, \bar{6} \cdot (2, \bar{6} + 2 \cdot 1, \bar{3})\} + \sqrt{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6, \bar{6} \cdot 1, \bar{3}}{20.000} + \frac{6, \bar{6} \cdot 1, \bar{3}}{1.000} = \\ \delta_{h1} &= 1,3456 \cdot 10^{-2} \text{ m} \end{aligned}$$

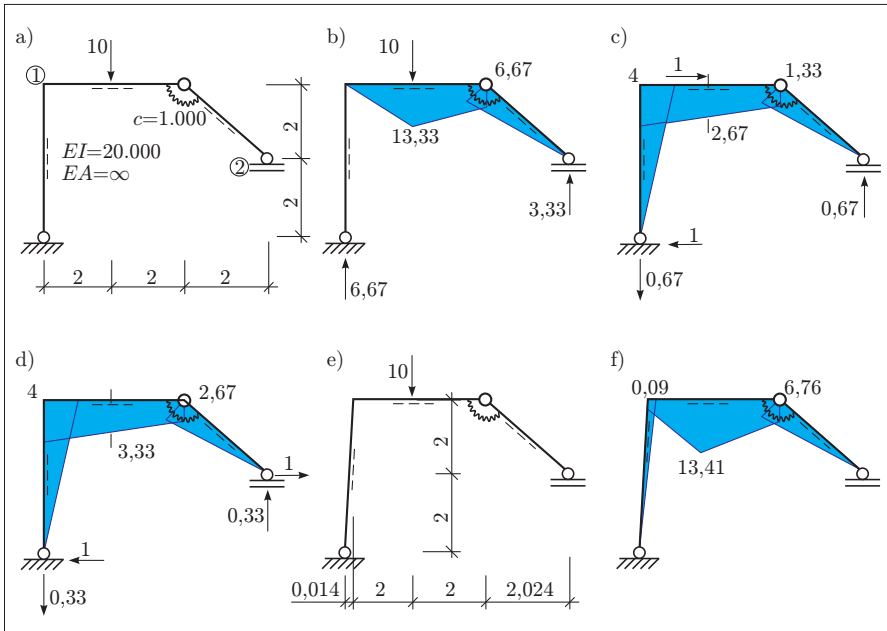


Abb. 4.14. Schnittgrößenermittlung am verformten System. a) System, b) Momente und Lager nach Theorie 1. Ordnung, c) Hilfszustand 1, d) Hilfszustand 2, e) System im verformten Zustand und f) Momente nach Theorie 2. Ordnung

$$\begin{aligned}
 \delta_{h2} &= \frac{2 \cdot 13, \bar{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot (4 + 2 \cdot 3, \bar{3}) + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \{13, \bar{3} \cdot (2 \cdot 3, \bar{3} + 2, \bar{6})\}}{20.000} \\
 &+ \frac{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \{6, \bar{6} \cdot (3, \bar{3} + 2 \cdot 2, \bar{6})\} + \sqrt{8} \cdot \frac{1}{3} \cdot 6, \bar{6} \cdot 2, \bar{6}}{20.000} + \frac{6, \bar{6} \cdot 2, \bar{6}}{1.000} = \\
 \delta_{h2} &= 2,4023 \cdot 10^{-2} \text{ m.}
 \end{aligned}$$

4.6.3 Fließgelenkbildung und Traglastverfahren

Fließgelenke bilden sich, wenn im Werkstoff die Streck- oder Fließgrenze erreicht wird. Nach Norm wird der Nachweis nach dem Traglastverfahren als *plastisch-plastisch* bezeichnet. Das Traglastverfahren darf nur für Systeme ohne Stabilitätsgefahr verwendet werden, vergleiche [25].

Die wesentliche Eigenschaft eines Werkstoffs, die zu Fließgelenken führt, ist die Fließfähigkeit. Spröde Werkstoffe wie Glas oder Beton fließen nicht, zumindest in überschaubaren Zeiträumen nicht. Wenn die maximale Zug- oder Druckfestigkeit erreicht ist, bricht bei spröden Werkstoffen das Material. Fließgelenke können also nur bei fließfähigen Werkstoffen vorkommen, wie z.B. bei Stahl.

Die charakteristische Streckgrenze für einen Stahl St 37-2³ (Bezeichnung nach DIN 18800 (11.90)) liegt bei $f_{y,k} = 240 \text{ N/mm}^2$. Zum Verständnis betrachten wir

³ Erzeugnisdicke $\leq 40 \text{ mm}$

Abbildung 4.15. Wird ein Bauteil bis zu einer Spannung belastet, die kleiner als die Fließgrenze $f_{y,k}$ ist, so verformt es sich ideal elastisch. Wird es wieder entlastet, so verformt es sich in seinen Ausgangszustand zurück. Die Abmessungen vorher und nachher sind gleich. Wird die Last erhöht, also auch eine größere Verformung aufgebracht, so plastiziert das Bauteil, die Spannung steigt jedoch nur noch geringfügig an, wenn man das in Abbildung 4.15 b dargestellte σ - ε -Diagramm zugrunde legt. Nach einer Entlastung verformt sich das Bauteil nur um den elastischen Anteil zurück, der plastische Anteil verbleibt. Wird das Bauteil bis zur maximalen Tragfähigkeit $f_{u,k}$ belastet, so ist der Anteil der plastischen Verformungen groß und das System dauerhaft und recht deutlich verformt – was für die Gebrauchstauglichkeit mitunter nachteilig ist.

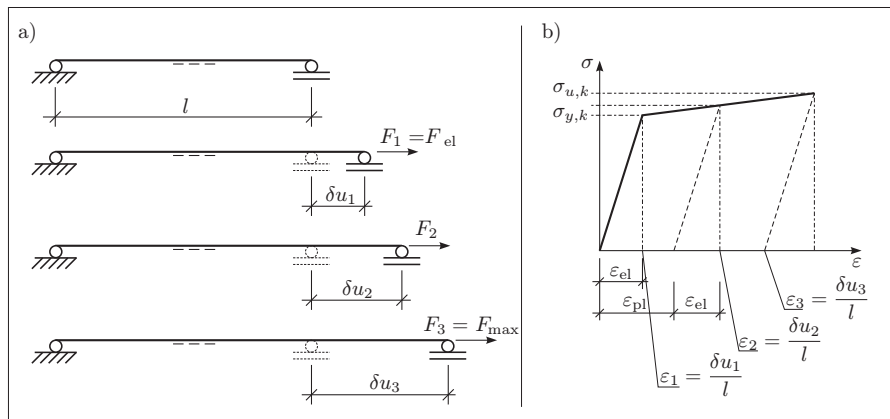


Abb. 4.15. Elastische und plastische Verformung. a) Zugstab unter verschiedenen Belastungen und b) Spannungs-Dehnungs-Beziehung.

Vereinfachend kann angenommen werden, dass die Spannung ab Erreichen der Fließgrenze nicht zunimmt und die Verfestigung (=Erreichen der Zugfestigkeit von hier $f_{u,k}$) erst bei sehr großen Verformungen erreicht wird. Ein Fließgelenk überträgt somit die plastische Kraft, die sich aus wirksamer Querschnittsgröße und Fließgrenze ergibt, beispielsweise

$$M_{y,pl} = W_{y,pl} \cdot f_{y,k}.$$

Zunächst sind die Verformungen und der Verformungspfad, wie z.B. in Abbildung 4.15 dargestellt, zu bestimmen. Aufbauend hierauf kann eine verträgliche Belastung des Bauteils abgeschätzt werden. Zudem ermöglicht eine Bemessung mit Ausnutzung der plastischen Reserven eine wirtschaftlichere Lösung als die Nachweise elastisch-elastisch oder elastisch-plastisch, allerdings hat ein plastisch-plastisch bemessenes Bauteil auch kaum noch Reserven, abgesehen von der Verfestigungswirkung zwischen Fließgrenze und Zugfestigkeit.

Das Traglastverfahren ist eine Möglichkeit, die maximale Traglast unter Ausnutzung plastischer Reserven an einem System zu ermitteln. Bei statisch bestimmten

Systemen wird dabei lediglich die plastische Querschnittsreserve und bei statisch unbestimmten Systemen zusätzlich die plastische Reserve des Systems ausgenutzt.

Die Größe der Traglast selbst ist statisch bestimmt, denn statisch überzählige Kräfte werden nach und nach durch ihre plastischen Kräfte ersetzt, bis das System eine kinematische Kette besitzt. Damit haben weder Temperaturänderungen noch Lagerverschiebungen einen Einfluss auf die Traglast.

Eine Traglast kann folglich für statisch unbestimmte und statisch bestimmte Systeme ermittelt werden. Die Formänderung des Systems bleibt bei der Traglastermittlung außer Acht. Sind die folgenden Punkte gleichzeitig erfüllt, so ist die maximale Last, die Traglast, des Systems erreicht.

1. Das Gleichgewicht für Lasten und Schnittgrößen muss erfüllt sein.
2. Die Biegemomente dürfen nur an den Fließgelenken maximal so groß sein wie die Fließmomente.
3. Es muss eine kinematische Kette erreicht werden. Für ein n -fach statisch unbestimmtes System ergeben sich $n + 1$ Fließgelenke.

Sind nur die ersten zwei Bedingungen erfüllt, so spricht man vom *statischen Satz*, denn das System ist nach wie vor mindestens statisch bestimmt und damit statisch. Die Traglast braucht nicht bestimmt zu werden.

Sind die erste und dritte Bedingung erfüllt, so spricht man vom *kinematischen Satz*, denn das System hat die kinematische Kette erreicht. Die Traglast ist in diesem Lastfall erreicht oder überschritten.

Für statisch bestimmte Systeme ergibt sich die Traglast aus dem Versagen an der am höchsten beanspruchten Stelle des Tragwerkes, wobei das System auf Grund eines Fließgelenks (bei Symmetrie auch mehrere) versagt.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, ein Tragwerk mittels Traglastverfahren zu untersuchen. Bei einfachen Systemen wird schnell deutlich, wie die Versagensreihenfolge der Bauteile lautet. Entsprechend können die plastischen Kräfte der Reihe nach angeordnet und die Traglast, sowie die entsprechenden Verformungen bestimmt werden.

Die zweite Möglichkeit wird bei komplizierten Tragwerken verwendet. Hierbei wird das System mit einer wachsenden Last beaufschlagt. Bei jedem Laststeigerungsschritt werden die Schnittgrößen ermittelt und das Verhältnis zu den plastischen Kräften überprüft. Wird die plastische Last erreicht, so wird das Element durch seine plastische Kraft ersetzt und die Belastungssteigerung wird fortgesetzt. Dieses Verfahren setzt jedoch eine EDV-Unterstützung voraus, denn bei einer Handrechnung wäre der Aufwand zu groß.

Interessiert die Entwicklung der Verformungen nicht, so kann die Traglast auch direkt bestimmt werden. Über das Prinzip der virtuellen Verschiebungen werden innere und äußere Arbeiten bilanziert und aus deren Gegenüberstellung der Traglastfaktor, mit dem die äußeren Lasten skaliert werden, ermittelt.

Beispiel 1: Traglast

Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen. Der Durchlaufträger (Abbildung 4.16) ist einfach statisch unbestimmt. Zunächst bildet sich über der Mittelstützung ein Fließgelenk aus, anschließend beim Versagen in den Feldern. Die Traglast q ergibt sich nun aus folgenden Betrachtungen. Die Verdrehungen (Tangens des Winkels!) ergeben sich zu

$$\tan \varphi_1 = \tan \varphi_4 = \frac{1}{0,375a} = \frac{2,6}{a},$$

$$\tan \varphi_2 = \tan \varphi_3 = \frac{1}{0,625a} = \frac{1,6}{a}.$$

Die geleistete Arbeit, d.h. die innere und die äußere zusammen, muss Null ergeben. Die einzelnen Anteile lauten wie folgt:

$$A_{\text{gesamt}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot q - M_{pl,1} \cdot (\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2) - M_{pl,2} \cdot (\tan \varphi_2 + \tan \varphi_3) - M_{pl,3} \cdot (\tan \varphi_3 + \tan \varphi_4) = 0.$$

Werden die obigen Terme eingesetzt und die Symmetrie berücksichtigt, sowie, dass die plastischen Momente innerhalb des Trägers gleich groß sind, so folgt:

$$A_{\text{gesamt}} = q \cdot a - 2 \cdot M_{pl} \cdot (\tan \varphi_1 + \tan \varphi_2) - M_{pl} \cdot (\tan \varphi_2 + \tan \varphi_3) = 0$$

$$= q \cdot a - M_{pl} \cdot \frac{11,73}{a} = 0.$$

Damit ergibt sich die maximale Streckenlast, d.h. die Last, bei der sich das System im plastischen Zustand befindet, zu

$$q = M_{pl} \cdot \frac{11,73}{a^2}.$$

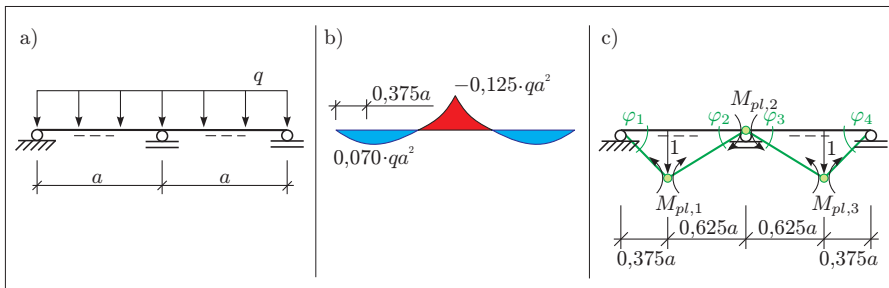


Abb. 4.16. Ermittlung der plastischen Grenzlast für einen Durchlaufträger. a) System, b) Momentenfläche und c) Verschiebungsfigur.

Anhand eines Zahlenbeispiels soll gezeigt werden, wie groß der Unterschied der Traglast zum Nachweis elastisch-elastisch ist. Bei diesem Nachweis darf die maximale Spannung f_y an keiner Stelle im Tragwerk überschritten werden. Angenommen wird ein Profil HEB-300 und eine Feldweite von $a = 8,0$ m. Sicherheitsbeiwerte werden bei dieser Betrachtung außer Acht gelassen.

Das plastische Widerstandsmoment beträgt $W_{y,pl} = 1869 \text{ cm}^3$. Die Streckgrenze für einen St 37-2 Stahl beträgt $f_{y,k} = 24 \text{ kN/cm}^2$. Damit erhält man ein plastisches Moment von

$$M_{pl} = W_{pl} \cdot f_{y,k} = 448,56 \text{ kNm}$$

und eine maximale Traglast q

$$q = M_{pl} \cdot \frac{11,7\bar{3}}{a^2} = 448,56 \cdot \frac{11,7\bar{3}}{8^2} = 82,2 \text{ kN/m}.$$

Das elastische Widerstandsmoment der Profils beträgt $W_y = 1680 \text{ cm}^3$. Bei einem normalen Spannungsnachweis darf das Moment an jeder Stelle des Systems nicht größer als

$$M_{\max} = W_y \cdot f_{y,k} = 1680 \cdot 24 = 403,2 \text{ kNm}$$

sein. Somit erhält man als maximale elastische Traglast (maßgebendes Moment über dem mittleren Auflager)

$$q_{el-el} = \frac{M_{\max}}{0,125 \cdot a^2} = \frac{403,2}{0,125 \cdot 8^2} = 50,4 \text{ kN/m}.$$

Das bedeutet, dass die Traglast bei einem Nachweis *plastisch-plastisch* um über 60 % gegenüber einem normalen Spannungsnachweis gesteigert werden kann.

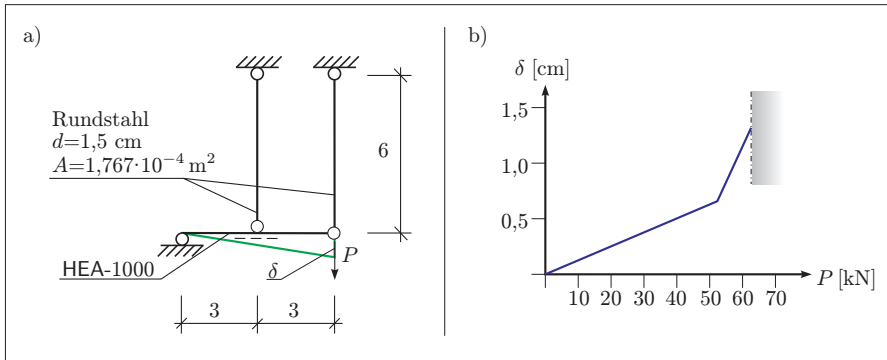


Abb. 4.17. Ermittlung der Kraft-Verformungs-Beziehung für ein Tragwerk. a) System und b) Kraft-Verformungs-Linie.

Beispiel 2: Kraft-Verformungslinie

Für das in Abbildung 4.17a gezeigte System soll die Kraft-Verformungslinie bestimmt werden. Der Biegeträger wird sich aufgrund des sehr biegesteifen Profils nicht verformen, so dass sich dieser starr um sein linkes Auflager dreht. Die Zugbänder werden nacheinander infolge Normalkraft versagen. Das rechte Zugband ist weiter vom Drehpunkt entfernt als das linke, es wird somit als erstes die Grenzdehnung zum plastischen Bereich erfahren. Die Kraft im rechten Zugband ist dann:

$$\begin{aligned} F_{1,pl} &= A \cdot f_{y,k} = 1,767 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 240 \text{ MN/m}^2 \\ &= 0,0424 \text{ MN} = 42,41 \text{ kN}. \end{aligned}$$

Die Dehnung und die entsprechende Verformung ergeben sich zu

$$\varepsilon = \frac{f_{y,k}}{E} = \frac{240}{210.000} = 1,143 \cdot 10^{-3} = 1,14\text{‰},$$

$$\delta_1 = \varepsilon \cdot l = 1,143 \cdot 10^{-3} \cdot 6,0 = 0,0069 \text{ m} = 0,69 \text{ cm}.$$

Gemäß dem Strahlensatz ist die Verformung des linken Stabes halb so groß wie die des rechten, und demzufolge ist auch die Kraft im Element nur halb so groß. Über das Momentengleichgewicht erhält man die aufgebrachte Last P zu

$$P = F_{1,pl} + \frac{1}{4} F_{2,pl} = 42,41 + 10,60 = 53,01 \text{ kN}.$$

Wird das System nun weiter belastet, so wirkt im rechten Stab grundsätzlich die Kraft $F_{1,pl}$. Der linke Stab wird ebenfalls bis zur Streckgrenze gedehnt und trägt nun die Kraft $F_{2,pl}$ ab, die genauso groß ist wie $F_{1,pl}$. Die aufgebrachte Last ergibt sich nun zu

$$P = F_{1,pl} + \frac{1}{2} F_{2,pl} = 42,41 + 21,21 = 63,62 \text{ kN}$$

und die Verformung ist gemäß Strahlensatz nun

$$\delta_2 = \varepsilon \cdot l \cdot 2 = 1,143 \cdot 10^{-3} \cdot 6,0 \cdot 2 = 0,0137 \text{ m} = 1,37 \text{ cm}.$$

Das Last-Verformungs-Diagramm ist in Abbildung 4.17 b dargestellt und zeigt das nichtlineare Verhalten des Tragwerks. Wenn beide Stäbe plastiziert sind, dann ist keine weitere Lastaufnahme mehr möglich, d.h. ab dem Erreichen der Last von $P = 63,6 \text{ kN}$ versagt das System.

4.6.4 Stabilitätsprobleme

Üblicherweise reduziert sich die Analyse eines Tragwerkes auf die Berechnung der Schnittgrößen am unverformten System, also nach Theorie 1. Ordnung. Doch in einigen Fällen ist eine genauere Analyse des Systems erforderlich, gemeint ist die Überprüfung des Systems auf Stabilitätsversagen.

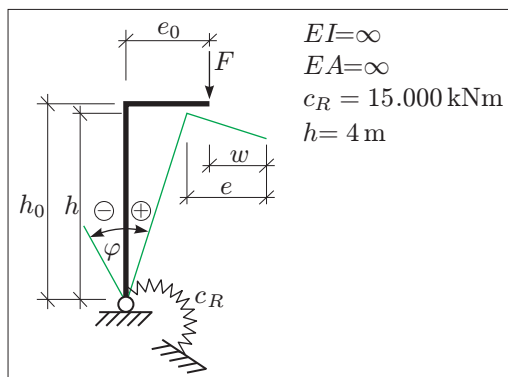


Abb. 4.18. Systembild mit Verformungsfigur für die Betrachtung eines einfachen Stabilitätsproblems. Die Stäbe werden dabei als unendlich Dehn- und Biegesteif angenommen. Es ist lediglich eine Drehung um das Auflager möglich.

Die Tragwerkselemente, die solch ein Versagen aufweisen können, sind dünne und schlanke druckbeanspruchte Teile des Systems. Das Versagen kündigt sich nicht

vorher an, es ist ein plötzlicher Ausfall eines Elementes. Bei stabförmigen Bauteilen spricht man vom *Knicken*, bei flächigen Strukturen vom *Beulen*. Auch bei biegebeanspruchten Trägern kann solch ein Stabilitätsproblem auftreten; der durch Druckspannungen beanspruchte Teil des Trägers kann kippen, man spricht dann vom *Biegedrillknicken*. Bei diesen Betrachtungen muss das System nach Theorie 2. Ordnung (oder höherer Ordnung) untersucht werden, erst dann tritt ein Stabilitätsversagen auf.

Bei der Analyse von Strukturen sind zwei Fälle zu unterscheiden, das Spannungsproblem und das Stabilitätsproblem. Anhand eines einfachen Beispiels soll das Knicken eines Stabes verdeutlicht und der Unterschied zum Spannungsproblem hervorgehoben werden.

Ein einfaches Beispiel

Es wird das in Abbildung 4.18 dargestellte System betrachtet. Alle Stäbe sind unendlich Dehn- und Biegesteif, d.h. das System kann sich insgesamt nur um das Auflager um den Winkel φ verdrehen. Aufgebracht wird eine Last F und veränderlich ist der Hebelarm e_0 , ausgedrückt durch das Verhältnis e_0/h_0 .

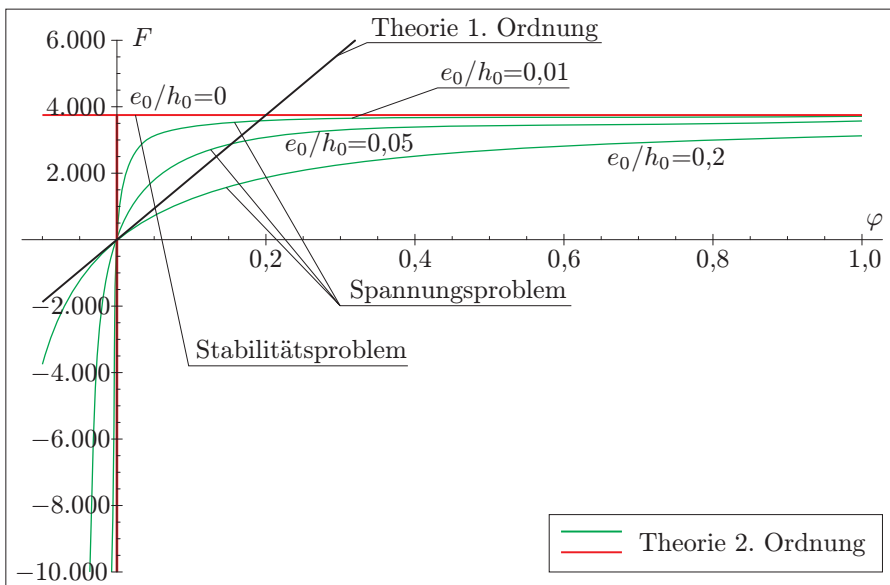


Abb. 4.19. Last-Verformungskurven für unterschiedliche Formulierungen und Parameter für e_0/h_0 .

Zunächst wird das System nach Theorie 1. Ordnung betrachtet. Bildet man das Momentengleichgewicht um das Auflager, so führt das auf

$$F \cdot e_0 = M$$

und unter Einbeziehung des Werkstoffes kann das Moment über

$$M = \varphi \cdot c_R$$

ausgedrückt werden. Das liefert die Gleichung

$$F(\varphi) = \frac{\varphi \cdot c_R}{\frac{e_0}{h_0} \cdot h_0} = \frac{3.750 \cdot \varphi}{\frac{e_0}{h_0}}.$$

Mit dieser Gleichung können Parameterstudien für verschiedene Werte von e_0/h_0 durchgeführt werden. Das Ergebnis für $e_0/h_0 = 0,2$ ist in Abbildung 4.19 mit der schwarzen Linie dargestellt. Je stärker das System belastet wird, desto größer ist die Verformung. Dieser Zusammenhang ist linear und ein reines Spannungsproblem.

Als nächstes wird eine Betrachtung nach Theorie 2. Ordnung durchgeführt, d.h. das Gleichgewicht wird am verformten System formuliert.

$$F \cdot (e + w) = M$$

Dabei wird vereinfachend angenommen, dass die vertikale Projektion e der Länge e_0 auch im verformten Zustand der wahren Länge e_0 entspricht, $e \sim e_0$. Gleiches gilt für die Höhe, $h \sim h_0$. Für kleine Winkel φ ist diese Näherung ausreichend, bei großen Verdrehungen ist diese Näherung zu ungenau. Die Gleichung für den Werkstoff (die Drehmomentenfeder) kann übernommen werden. Zusätzlich wird noch die Geometrie betrachtet, um einen Zusammenhang zwischen der Verformung w und der Verdrehung φ herzustellen.

$$w = h \cdot \varphi$$

Setzt man nun alle Gleichungen in die Gleichgewichtsformulierung ein, so erhält man

$$F(\varphi) = \frac{c_R \cdot \varphi}{\left(\frac{e_0}{h_0} + \varphi\right) \cdot h_0} = \frac{3.750 \cdot \varphi}{\frac{e_0}{h_0} + \varphi}.$$

Diese Formulierung führt auf das Stabilitätsproblem. Die Last-Verformungskurven sind für die Werte 0,2, 0,05, 0,01 und 0 für e_0/h_0 dargestellt. Ist $e_0/h_0 > 0$ liegt ein Spannungsproblem vor. Die Verformungen werden bei einer geringen Laststeigerung sehr groß. Das System ist ab einer bestimmten Last nicht mehr tragfähig.

Anders sieht es aus, wenn der Hebelarm zu Null gesetzt wird, $e_0/h_0 = 0$. Die Last lässt sich ohne eine Verformung bis zu einem Wert von 3.750 kN steigern. Dann allerdings ist das System nicht mehr stabil, die Verformungen können an diesem Punkt beliebig groß werden. Diesen Punkt nennt man Lastverzweigungspunkt. Bringt man eine noch so kleine horizontale Last an dem System an, so versagt das System schlagartig.

Eulerfälle

Elementar und aus der Technischen Mechanik bekannt sind die Knickfiguren nach Euler (siehe Abbildung 4.20). Diesen liegen trigonometrische Verformungsfunktionen zu Grunde. Sie werden für einfache Fälle als Referenzen verwendet, wenn FEM-Systeme zur Berechnung von Stabilitätsproblemen herangezogen werden sollen. Diese benutzen häufig Polynome als Ansatzfunktionen. Die Netze müssen fein diskretisiert werden, um die Euler-Ergebnisse zu erreichen. Siehe dazu auch [20].

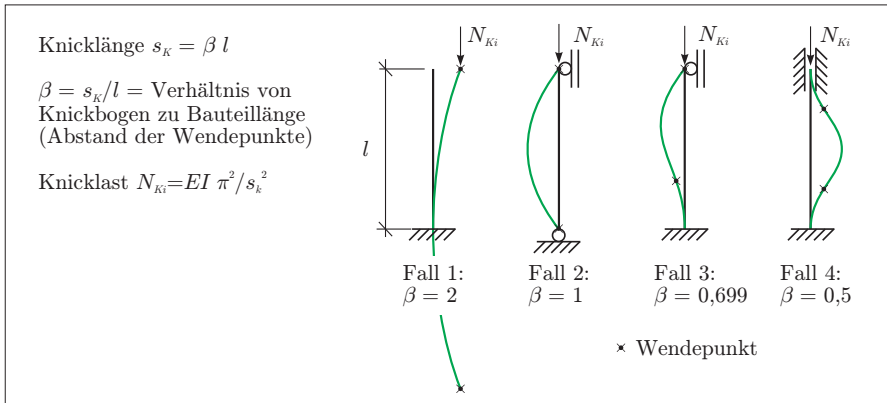


Abb. 4.20. Systeme mit Knicklasten und Knickfiguren nach Euler.

Detaillierte Angaben zur Bemessung und den einzelnen Rechenverfahren finden sich bei [22], [23] und [25].

Ein Balken auf zwei Stützen erfährt unter einer Vertikallast eine Durchbiegung. Wirkt an diesem Balken zusätzlich eine große Normalkraft, so trägt das, je nach Vorzeichen, zu einer Vergrößerung oder Verringerung der Durchbiegung bei. Bei reinen Druckspannungen, ohne Querbelastrung, wird daraus wieder das Stabilitätsproblem. Mit Querbelastrung und der Berücksichtigung der Verformungen bei der Schnittkraftermittlung erhöht sich das angreifende Moment durch die Druckkraft und damit auch die Durchbiegung. Erfährt der Balken eine Zugkraft, so ist dies eine Versteifung des Systems; folglich reduziert sich die Durchbiegung. Diese Tragwirkung ist ähnlich dem Seil, welches mit einer Kraft H vorgespannt wird. Die Seildifferentialgleichung lautet

$$-H w''(x) = p(x).$$

Der Unterschied ist aber, dass vertikale Lasten vom vorgespannten Seil abgetragen werden können. Die Haupttragwirkung und die resultierende Verformung wird bei der Betrachtung eines Balkens nach Theorie 2. Ordnung von der Biegesteifigkeit hervorgerufen. Beim Seil wird diese Steifigkeit vernachlässigt. Dennoch lassen sich Parallelen erkennen.

Die Differentialgleichung eines Balkens unter Querlast nach Theorie 2. Ordnung lautet nun mit N als Longitudinalkraft (H beim Seil als Vorspannkraft):

$$\underbrace{EI w^{IV}(x)}_{\text{Balken, Theorie 1. Ordnung}} - \underbrace{N w''(x)}_{\text{Seil, Theorie 1. Ordnung}} = p(x)$$

Der Balken hat nach Theorie 2. Ordnung mehr Schnittgrößen als nach Theorie 1. Ordnung, denn prinzipiell kommen die des Seiles nun noch hinzu (siehe auch Abbildung 4.21). Die Seillängskraft ist identisch zur Balkennormalkraft.

Die erste Greensche Identität (siehe auch Abschnitt 5.2) liefert für den Balken nach Theorie 1. Ordnung

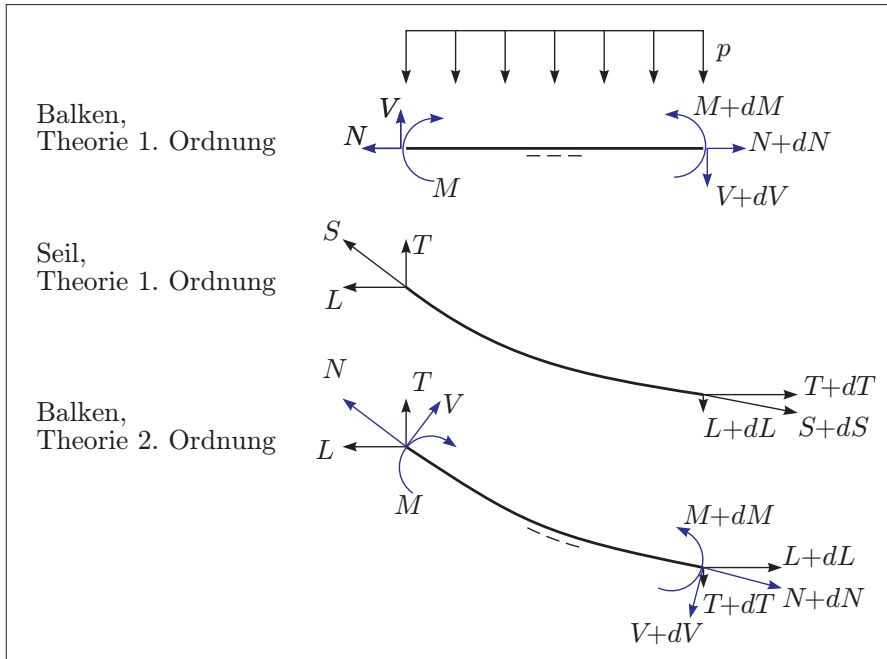


Abb. 4.21. Schnittgrößen am Balken und Seil nach Theorie 1. Ordnung und am Balken nach Theorie 2. Ordnung.

$$G(w, \hat{w}) = \underbrace{\int_0^l p \hat{w} \, dx}_{\delta A_{a, \text{Feld}}} + \underbrace{[V \hat{w} - M \hat{w}']_0^l}_{\delta A_{a, \text{Rand}}} - \underbrace{\int_0^l \frac{M \hat{M}}{EI} \, dx}_{\delta A_i} = 0.$$

Das gleiche Vorgehen liefert die erste Greensche Identität nach Theorie 2. Ordnung

$$G(w, \hat{w}) = \underbrace{\int_0^l p \hat{w} \, dx}_{\delta A_{a, \text{Feld}}} + \underbrace{[(V + N w') \hat{w} - M \hat{w}']_0^l}_{\delta A_{a, \text{Rand}}} - \underbrace{\int_0^l \frac{M \hat{M}}{EI} + N w' \hat{w}' \, dx}_{\delta A_i} = 0.$$

Die Elemente der Balkensteifigkeitsmatrix nach Theorie 2. Ordnung sind definiert als die inneren Wechselwirkungsarbeiten der Einheitsverformungen

$$k_{ij} = \int_0^l \frac{M \hat{M}}{EI} + N w' \hat{w}' \, dx,$$

wobei für w und $\hat{w}$ die Einheitsverformungen verwendet werden sollen. Die Hermite-Polynome sind jedoch ungeeignet, denn sie sind die Lösungen der homogenen Differentialgleichung $EI w^{IV} = 0$. Wird eines dieser Polynome zweifach abgeleitet, so verbleibt ein Restpolynom, welches dazu führt, dass die rechte Seite der Differentialgleichung nach Theorie 2. Ordnung nicht Null sein kann. Die Einflussfunktionen nach Theorie 2. Ordnung sind folglich keine Polynome.

Für die Biegelinie wird der Ansatz

$$w_h(x) = c_1 \sin(\varepsilon \frac{x}{l}) + c_2 \cos(\varepsilon \frac{x}{l}) + c_3 x + c_4$$

verwendet. Die Steifigkeitsmatrix ergibt sich aus

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 2(A+B) - \varepsilon^2 & -(A+B)l & -2(A+B) + \varepsilon^2 & -(A+B)l \\ & Al^2 & (A+B)l & Bl^2 \\ \text{sym.} & & 2(A+B) - \varepsilon^2 & (A+B)l \\ & & & Al^2 \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 &= -\frac{N l^2}{EI}, \\ A &= \frac{\varepsilon (\sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon)}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon}, \\ B &= \frac{\varepsilon (\varepsilon - \sin \varepsilon)}{2(1 - \cos \varepsilon) - \varepsilon \sin \varepsilon}. \end{aligned}$$

Für den Fall $N > 0$ sind anstelle der trigonometrischen Funktionen ($\sin$, $\cos$) die Hyperbelfunktionen ($\sinh$, $\cosh$) zu verwenden und anstelle von ε^2 ist $|\varepsilon^2|$ einzusetzen. Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \\ \cosh(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Knicklastberechnung mit der MVM

Eine Berechnung nach Theorie 2. Ordnung liefert genauere Ergebnisse als eine nach Theorie 1. Ordnung, sowohl die Schnittgrößen, als auch die Verformungen sind realistischer. Allerdings wird die Verwendung der im Kapitel 3.3.6 dargestellten geometrischen Steifigkeitsmatrix empfohlen, da diese deutlich einfacher in der Handhabung ist. Anzumerken ist, dass die Lösung mit diesem Verfahren lediglich eine Näherung darstellt. Um möglichst exakte Ergebnisse zu erhalten, sind mehrere Elemente für einen Stab zu verwenden.

Der Rechenablauf ist wie folgt:

1. Berechnung des Systems nach Theorie 1. Ordnung ($\mathbf{K}^I$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}$).
2. Berechnung der Stabkennzahlen $\varepsilon_{\text{alt}} = \sqrt{\frac{|N|l^2}{EI}}$.
3. Berechnung des Systems nach Theorie 2. Ordnung durchführen, die Normalkräfte aus der Berechnung nach Theorie 1. Ordnung zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix heranziehen ($\mathbf{K}^{II}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{f}$, $\mathbf{u}$).
4. Berechnung der aktuellen Stabkennzahlen $\varepsilon_{\text{neu}} = \sqrt{\frac{|N|l^2}{EI}}$.
5. Beobachtung der Veränderung $R = |\varepsilon_{\text{neu}} - \varepsilon_{\text{alt}}|$. Wenn die Berechnung konvergiert, das System sich also stabilisiert, geht R gegen Null. Wenn das System infolge eines Stabilitätsproblems versagt, wächst R an.

6. Wenn sich das System noch nicht stabilisiert hat, ist ein neuer Rechendurchgang nach Theorie 2. Ordnung durchzuführen.

Für die Modellbildung ist zu beachten, dass die Normalkraftfreiheitsgrade nicht mit modelliert werden, solange es sich um ein in eine Richtung liegendes System handelt (liegender Stab oder vertikaler Stab); es werden nur die vier Balkenfreiheitsgrade betrachtet. Das Ablaufschema für die Knicklastberechnung eines Systems lautet:

1. Aufstellen der Gesamtsteifigkeitsmatrix nach Theorie 2. Ordnung.
2. Extraktion der reduzierten Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{\text{red}}$.
3. Lösung des Eigenwertproblems bezüglich der Last P : Die Determinante der Matrix $\mathbf{K}_{\text{red}}$ muss zu Null werden, um eine von Null (triviale Lösung) verschiedene Lösung zu erhalten. Von den möglichen Werten für P ist der betragsmäßig kleinste zu wählen, weil dieser zum ersten Verzweigungsfall gehört. Die höheren Lasten stehen für Belastungen, bei denen das System wieder instabil werden würde, so diese erreicht werden würden.
4. Berechnung der Elemente der Steifigkeitsmatrix.
5. Die Eigenformen sind zu berechnen. Weil das zugehörige Gleichungssystem homogen ist, muss eine Weggröße vorgegeben werden, in deren Abhängigkeit die weiteren Weggrößen bestimmt werden.

Beispiel für eine Knicklastberechnung

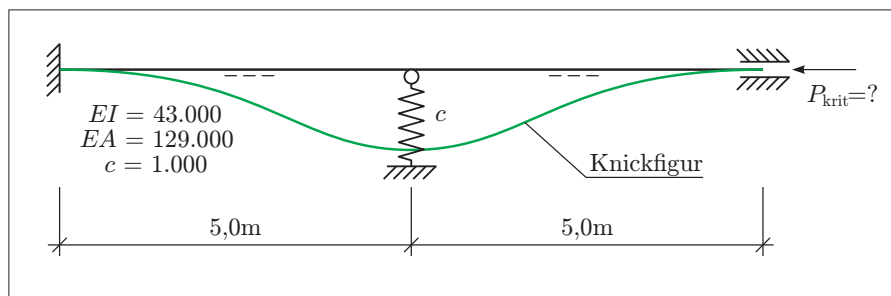


Abb. 4.22. Berechnung der kritischen Knicklast für ein Tragwerk mit eingezeichneter Knickfigur.

Für das in Abbildung 4.22 dargestellte System soll die kritische Knicklast und die Knickfigur, d.h. die erste Eigenform des Systems, bestimmt werden. Die Systemdaten sind in der Abbildung aufgelistet. Die Vergabe der Freiheitsgrade wird wie in Abbildung 4.23 a dargestellt vorgenommen. Daraus ergibt sich die in Abbildung 4.23 c schematisch gezeigte Gesamt- bzw. reduzierte Steifigkeitsmatrix nach Theorie 2. Ordnung:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{\text{red}}^{II} &= \begin{bmatrix} \frac{24EI}{l^3} + \frac{12N}{5l} + c & -\frac{6EI}{l^2} - \frac{N}{10} + \frac{6EI}{l^2} + \frac{N}{10} \\ -\frac{6EI}{l^2} - \frac{N}{10} + \frac{6EI}{l^2} + \frac{N}{10} & \frac{8EI}{l} + \frac{4Nl}{15} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1.157}{5.375}EI + \frac{12}{25}N & 0 \\ 0 & \frac{8}{5}EI + \frac{4}{3}N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.256 + 0,48N & 0 \\ 0 & 68.800 + 1,3N \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

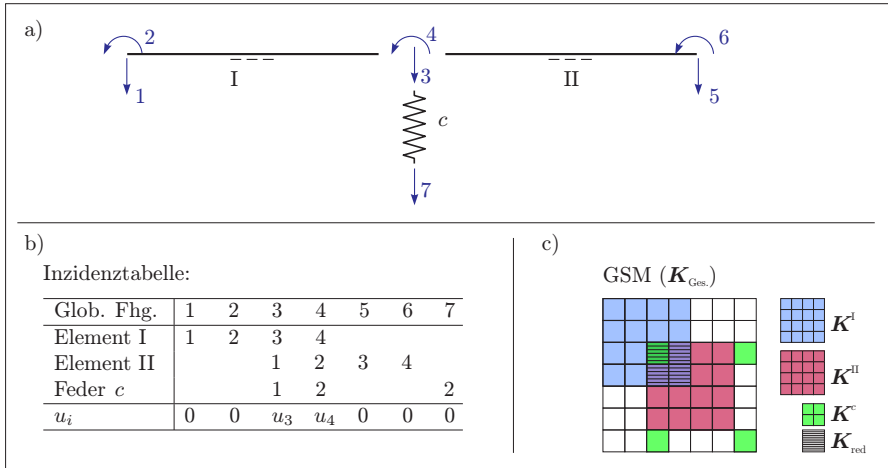


Abb. 4.23. a) Zerlegtes System mit angetragenen globalen Freiheitsgraden, b) Inzidenztabelle und c) gesamte und reduzierte Steifigkeitsmatrix.

Die Bestimmung der kritischen Knicklast P_{krit} erfolgt, indem die Determinante der reduzierten Steifigkeitsmatrix zu Null gesetzt wird:

$$\begin{aligned}
 \det \mathbf{K}_{\text{red}}^{II} &= 0 \\
 &= (9.256 + 0,48N) \cdot (68.800 + 1,3N) = 0.
 \end{aligned}$$

D.h. jeder Klammerausdruck für sich gesehen muss Null werden, dann ist die Determinante auch Null. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 9.256 + 0,48N &= 0 \Rightarrow N_1 = -19.283,3 \text{ kN} \\
 68.800 + 1,3N &\Rightarrow N_2 = -51.600 \text{ kN}.
 \end{aligned}$$

Zunächst ist einmal festzustellen, dass beide Ergebnisse Druckkräfte sind und daher beide grundsätzlich als die kritische Last in Frage kommen. Die betragsmäßig kleinste Last, nämlich $N_1 = -19.283,3 \text{ kN}$, führt auf die kritische Knicklast P_{krit} des Systems mit $P_{\text{krit}} = 19.283,3 \text{ kN}$.

Als letztes soll die erste Eigenform des Systems, die Knickfigur, bestimmt werden. Dazu wird die ermittelte kritische Normalkraft in die reduzierte Steifigkeitsmatrix eingesetzt und einer der Freiheitsgrade vorgegeben. Das Gleichungssystem sieht

dann wie folgt aus:

$$\begin{bmatrix} 9.256 - 0,48 \cdot 19.283, \bar{3} & 0 \\ 0 & 68.800 - 1, \bar{3} \cdot 19.283, \bar{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem stellt einen Sonderfall dar, da die gesamte erste Zeile der Steifigkeitsmatrix Null ist:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 43.088, \bar{8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt, dass die Weggröße u_4 immer Null sein muss, sonst ist das Gleichungssystem nicht erfüllt, dafür ist u_3 beliebig wählbar. Die Eigenform ist in Abbildung 4.22 dargestellt.

4.7 Fragerunde

1. Bei welchen Berechnungen wird Symmetrie am häufigsten ausgenutzt oder ist geradezu notwendig?
2. Was unterscheidet den Bernoulli- vom Timoschenkobalken?
3. Welche Hauptanwendung gibt es für die Theorie 2. Ordnung?
4. Wird ein Weggrößenverfahren zur Berechnung einer Knicklast verwendet, so hängt das Ergebnis von der Diskretisierungsdichte ab. Wieso ist das so, und warum ist es bei Berechnungen nach dem Kraftgrößenverfahren (Eulerfälle) anders?
5. Wovon hängt die Tragfähigkeit eines Seils ab, einmal abgesehen vom Seildurchmesser und Material?
6. Kann man ein mit Querlast belastetes Seil so stark spannen, dass es nicht durchhängt?
7. Was unterscheidet Streckgrenze $f_{y,k}$ und maximale zulässige Spannung $f_{u,k}$?
8. Was unterscheidet ein normales Gelenk von einem Fließgelenk?

Moderne Statik

5.1 Energie und Arbeit

5.1.1 Viel Arbeit und Energie statt Schnittprinzip

Die moderne Statik arbeitet nicht mit dem klassischen Schnittprinzip. Vor allem die numerischen Verfahren bedienen sich anderer Zielgrößen zur Gleichgewichtsbildung, beschrieben beispielsweise in [12] und [16]. Die grundlegenden Begriffe sollen in diesem Abschnitt kurz erläutert werden:

- Energieerhaltung,
- Potentielle Energie,
- Arbeit,
- Prinzip der virtuellen Verrückungen,
- Prinzip der virtuellen Kräfte und
- Minimum der potentiellen Energie.

5.1.2 Energieerhaltung

Ein grundlegendes Prinzip der Statik und Mechanik ist die Energieerhaltung in einem System. Wird einem System Energie zugeführt, so wird sie so lange gespeichert, bis sie wieder abgegeben werden kann. Unter der Annahme der Verlustfreiheit sind die Energiezufuhr und -abgabe gleich groß.

Beispiel

Eine Kugel (Abbildung 5.1) wird auf eine Bahn gehoben und hinunterlaufengelassen. Durch das Hochheben wird Energie zugeführt und durch das Hinablaufen wieder abgegeben. Dabei werden die Energieerscheinungsformen *potentielle Energie* und *kinetische Energie* ineinander überführt. Erst durch Abbremsen der Kugel wird dem System über Reibungswärme die anfangs zugeführte Energie entzogen. Weil der Endpunkt der Rollbahn in diesem Beispiel unterhalb des Anfangsniveaus liegt, wird auch ein Teil der potentiellen Energie des Anfangszustands dem System entzogen. Wichtig für die Energiebetrachtungen sind also nicht die absoluten Energiebeträge, sondern deren Differenzen.

Beispiel

Am Normalkraftstab ergibt sich (siehe dazu auch [20]) unter Vernachlässigung des Temperatureinflusses und mit Beachtung von $\varepsilon = \sigma \cdot E$ und $\varepsilon = u'(x)$ die innere Energie zu

$$A_i = \Pi_i = \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \cdot \varepsilon dA dx = \frac{1}{2} EA \int (u'(x))^2 dx = \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EA} dx.$$

Für den Biegebalken ergibt sich die innere Energie (in Bezug auf reine Biegung) zu

$$A_i = \Pi_i = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx.$$

5.1.4 Arbeit

Die äußeren Lasten arbeiten auf der Gesamtverformung. Die äußere Arbeit ist damit betragsgleich der äußeren Energie und es folgt

$$A_a = \sum_i F_i \cdot w(F_i) + \int p(x) \cdot w(x) dx$$

und die zugehörige Energie ist

$$\Pi_a = -A_a.$$

Das Gesamtpotential des Tragwerkes ergibt sich aus innerer und äußerer Energie zu

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a.$$

Unter der Annahme der Verlustfreiheit ergibt sich in Bezug auf die gesamte Arbeit am System:

$$A_{\text{ges}} = A_i - A_a = 0 \Leftrightarrow A_i = A_a.$$

5.1.5 Prinzip der virtuellen Verrückungen

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen (P.d.v.V.) wendet das Arbeitsprinzip an. Die zugrunde liegende Idee ist, dass an einem beweglichen Starrkörper die angreifenden Kräfte, so sie sich ausgleichen, eine Gesamtarbeit von Null leisten. Wird eine Verschiebung an der Stelle aufgebracht, an der eine einwirkende Kraft angreift, so ergibt sich an der Stelle, an der eine entgegenwirkende Kraft anliegt, ebenfalls ein Weg. Die auf diesen beiden Wegen geleistete Arbeit ist – bei Vorliegen von nur zwei Kräften – identisch. Sind eine Kraft und der Zusammenhang der Verformungen bekannt, so kann die unbekannte Kraft ermittelt werden.

Beispiel

Für das in Abbildung 5.3 gezeigte statisch bestimmte System soll die Lagerreaktion A unter Anwendung des P.d.v.V. bestimmt werden. Dazu wird eine Verschiebung von δ am Lager A angetragen und die Verschiebungsfigur gebildet. Über den Strahlensatz ergeben sich die Verschiebungen unter der Resultierenden der Streckenlast $q \cdot a$, der Lagerreaktion A und der Einzellast P . Der Wert der Lagerreaktion folgt nun aus

$$\begin{aligned}
 A_a &= 0 \\
 &= \frac{q a \delta}{2} - A \cdot \delta + P \cdot \delta \frac{a+b}{a} \\
 \Rightarrow A \cdot \delta &= \frac{q a \delta}{2} + P \cdot \delta \frac{a+b}{a} \\
 \Rightarrow A &= \frac{q a}{2} + P \frac{a+b}{a}.
 \end{aligned}$$

Es ist offensichtlich, dass die Verschiebung δ mit einem beliebigen Wert gewählt werden kann, denn in der Bilanz tritt dieser auf beiden Seiten der Gleichung auf und kann folglich eliminiert werden.

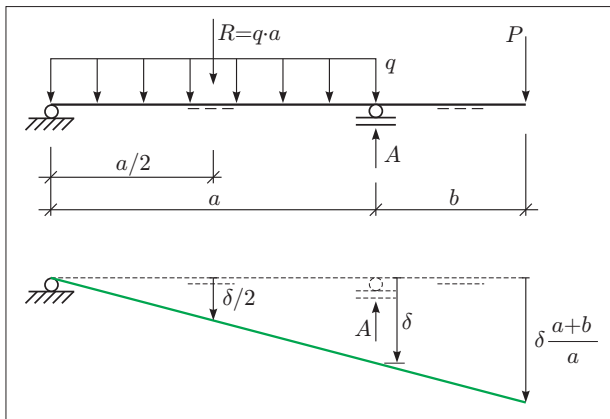


Abb. 5.3. Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen zur Lagerreaktionsbestimmung.

5.1.6 Prinzip der virtuellen Kräfte

Das Prinzip der virtuellen Kräfte wendet, genau wie das P.d.v.V., das Arbeitsprinzip an. Anstelle einer virtuellen Weggröße, wird hier eine gedachte Kraftgröße auf das System aufgebracht. Darüber lässt sich eine Verschiebungsgröße berechnen. Bekannt ist das Prinzip aus dem Kapitel 2.4 vom Kraftgrößenverfahren. Hier wurde eine Einslast an der Stelle aufgebracht, wo eine Punktverschiebung bestimmt werden sollte. Mittels der Überlagerung der Momentenflächen lässt sich die Verschiebung berechnen.

Beispiel

Auch hier soll das in Abbildung 5.3 dargestellte System für die Erläuterungen herangezogen werden. Mit dem P.d.v.K. soll die Absenkung am Systemende rechts bestimmt werden. Dazu wird an dieser Stelle eine gedachte Kraft der Größe 1 aufgebracht. Auch hier sind die inneren und äußeren Arbeiten zu bilanzieren, die die Kraft des virtuellen Zustands auf den Wegen des eigentlichen Systems leisten. Die äußere Arbeit A_a beschränkt sich auf die Multiplikation der Einskraft mit der gesuchten Verschiebung, $A_a = 1 \cdot \delta_w$.

Die innere Arbeit ist gerade die Überlagerung der aus den unterschiedlichen Lastfällen (Originallastfall und virtueller Lastfall) resultierenden Momentenverläufe. Zusammengefasst erhält man:

$$1 \cdot \delta_w - \int_0^l \frac{\hat{M} M}{EI} dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_w = \int_0^l \frac{\hat{M} M}{EI} dx.$$

Die virtuelle Kraftgröße könnte auch mit einem Wert verschieden von 1 gewählt werden. Das Ergebnis wäre das Gleiche. Die Momentenverläufe in der linearen Statik sind skalierbar, daher kürzt sich ein vielfaches von 1 aus der Arbeitsgleichung wieder heraus, da man ein vielfaches des Momentenverlaufs $\hat{M}$ berechnen würde.

5.1.7 Minimum der potentiellen Energie

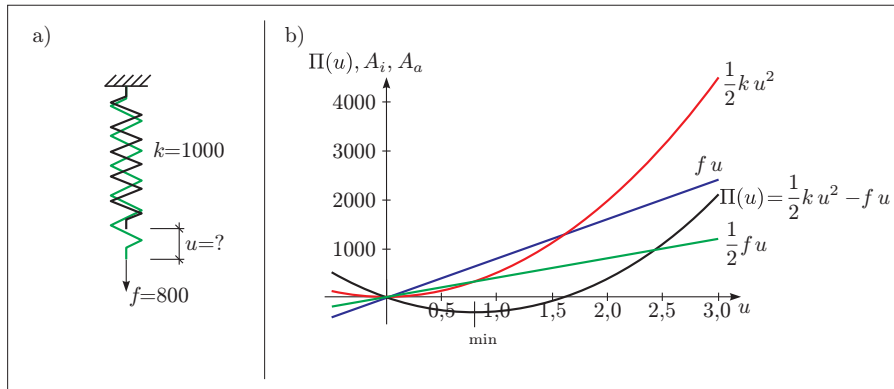


Abb. 5.4. Die stabile Auslenkung macht die potentielle Energie zum Minimum. a) Feder mit Auslenkung und b) Potentielle Energie.

Für eine Feder gilt das bereits bekannte Federgesetz (Hookesches Gesetz) $k \cdot u = f$. Die innere Arbeit (oder auch Formänderungsarbeit) ergibt sich zu

$$A_i = \frac{1}{2} \int_l \int_A \sigma \varepsilon dA dx = \frac{1}{2} u \cdot f = \frac{1}{2} k \cdot u^2.$$

Die äußere Arbeit kann aus dem vorigen Ausdruck abgelesen werden und ergibt sich zu

$$A_a = \frac{1}{2} f \cdot u.$$

Die gesamte potentielle Energie der Feder wird über folgende Gleichung bestimmt

$$\Pi = \Pi_i + \Pi_a = \frac{1}{2} k \cdot u^2 - f \cdot u.$$

Das Minimum der potentiellen Energie wird durch Ableiten der Gleichung nach der Veränderlichen u und Nullsetzen ermittelt.

$$\frac{\delta \Pi}{\delta u} = k \cdot u - f = 0$$

In der Gleichgewichtslage des Systems wird die potentielle Energie zum Minimum gemacht. Das bedeutet, dass ein System im Gleichgewicht die geringstmögliche Gesamtenergie speichert, sich also so wenig wie möglich verformt. Ein Einfeldersystem und die Verläufe der inneren und äußeren Energie und Arbeiten werden in Abbildung 5.4 gezeigt. Das System ist dann im Gleichgewicht, wenn die innere Arbeit gleich der äußeren Arbeit ist, $A_i = A_a$.

5.1.8 Satz von Betti

Betrachtet werden zwei gleiche Systeme mit unterschiedlichen Belastungsfunktionen. Demzufolge haben diese Systeme unterschiedliche Lösungen für die Verschiebungsfigur. Betrachtet werden die äußeren Arbeiten. Der Satz von Betti besagt, dass *die Arbeiten, die die Kräfte des ersten Systems auf den Wegen des zweiten Systems leisten gleich den Arbeiten sind, die die Kräfte des zweiten Systems auf den Wegen des ersten Systems leisten*.

Der Satz von Betti beinhaltet sowohl das P.d.v.V. wie auch das P.d.v.K., zusammengefasst das Prinzip der virtuellen Arbeiten. Als Lasten können sowohl Kraft- als auch Weggrößen angenommen werden. Formuliert man für die in Abbildung 5.3 dargestellten Systeme den Satz von Betti, so führt das direkt auf das in Kapitel 5.1.5 im Beispiel dargestellte Ergebnis.

Um das P.d.v.K. aus dem Satz von Betti zu erhalten bedarf es ein wenig mehr Arbeit. Ausgangspunkt ist wieder das in Abbildung 5.3 gezeigte belastete System. Der zweite Lastfall soll wieder eine Einslast am rechten Systemende sein. Der Satz von Betti liefert

$$\int_0^a q(x) \cdot \hat{w} \, dx + P \cdot \hat{w}(a+b) = 1 \cdot w(a+b).$$

Der erste Integralausdruck kann mittels zweimaliger partieller Integration und durch Ersetzen von $q(x) = EI w^{IV}$ umgeformt werden. Man erhält

$$\int_0^a EI w'' \hat{w}'' \, dx = \int_0^a \frac{M \hat{M}}{EI} \, dx$$

und zusätzlich die Randarbeitsterme $V \hat{w}$ und $M \hat{w}'$, welche an jedem Abschnitt zu betrachten sind, also von 0 bis a und von a bis $a+b$. Der einzige Term, der von Null verschieden ist, ist der Ausdruck für die Querkraft für den rechten Rand des Systems, $-V(a+b) \cdot \hat{w}(a+b)$. Setzt man alle Größen in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$w(a+b) = \int_0^a \frac{M \hat{M}}{EI} \, dx \underbrace{- V(a+b) \cdot \hat{w}(a+b) + P \cdot \hat{w}(a+b)}_{=0} = \int_0^a \frac{M \hat{M}}{EI} \, dx.$$

Die Randterme werden zu Null, da die Querkraft am rechten Rand gerade der Belastung P entspricht. Und das gewonnene Ergebnis ist mit dem nach dem P.d.v.K. identisch.

5.2 Einflusslinien

5.2.1 Bedeutung

Einflussfunktionen sind die Basis für die moderne Statik und Mechanik. Sie bilden die Grundlage der finite Elemente Methode (FEM) und der Randelementemethode (REM), (engl.: *Boundary Elements (BE)*). Über sie werden die Steifigkeitsmatrizen und Lastvektoren definiert. Aus diesem Grund sind die Einflussfunktionen so wichtig. In diesem Abschnitt soll deshalb erklärt werden, wie Einflussfunktionen gebildet werden und welche Eigenschaften sie haben.

Eine Einflussfunktion wird für eine Zielgröße¹ an einer Stelle des Tragwerkes definiert. Sie gibt an, welche Wirkung eine, an einer beliebigen Stelle des Tragwerkes angreifende Belastung auf die Zielgröße hat. Am Verlauf der Funktion kann somit erkannt werden, welchen Einfluss eine Last an einer beliebigen Stelle im Tragwerk auf die gesuchte Zielgröße ausübt.

5.2.2 Beispiele

Die im folgenden gezeigten Beispiele verdeutlichen die Vorgehensweise bei der Bildung von Einflussfunktionen. Doch wo finden diese eine konkrete Anwendung? Antwort: Überall in der Statik.

Sprungbrett

Betrachten wir als erstes ein Sprungbrett, wie es im Schwimmbad zu finden ist. In Abbildung 5.5 a ist das Sprungbrett mit Springer dargestellt. Der Springer läuft von links nach rechts. Hierbei wirken verschiedene Kräfte auf die Lager des Sprungbretts, wie aus den Skizzen in 5.5 b abzulesen ist. Werden die jeweiligen Kräfte für A und B an die Stellen angetragen, an denen sich die Last G befindet, so erhält man die Einflusslinien 5.5 c für das Lager A und 5.5 d für das Lager B . Die Lagerreaktionen werden jeweils nach unten gerichtet als positiv definiert. An den Einflusslinien kann sofort erkannt werden, dass Lager A Druck- und Zugkräfte abtragen muss, wohingegen Lager B nur Druckkräfte abträgt. Deshalb wird bei Sprungbrettern nur das dem Wasser abgewandte Lager zugfest ausgelegt, wohingegen das dem Wasser zugewandte Lager durch eine verschiebbliche Rolle realisiert wird. Durch Verschieben der Rolle können die Schwingeigenschaften optimal eingestellt werden. Durch die Verschiebung ändern sich dann allerdings auch die Hebelarme, so dass die Kräfte anwachsen, obwohl der Springer gar nicht schwerer wird. Die dynamische Belastung infolge Wippens des Springers ist deutlich größer als die statische Belastung durch die Gewichtskraft des Springers. Weiteres zu dynamischen Belastungen findet sich z.B. bei [20].

Punktweise Konstruktion der Einflusslinie

Für eine wandernde Einzellast (siehe Abbildung 5.6) soll das resultierende Biegemoment an der Stelle $x = l/4$ betrachtet werden. Dazu wird die Wanderlast an

¹ Kraft- oder Weggröße

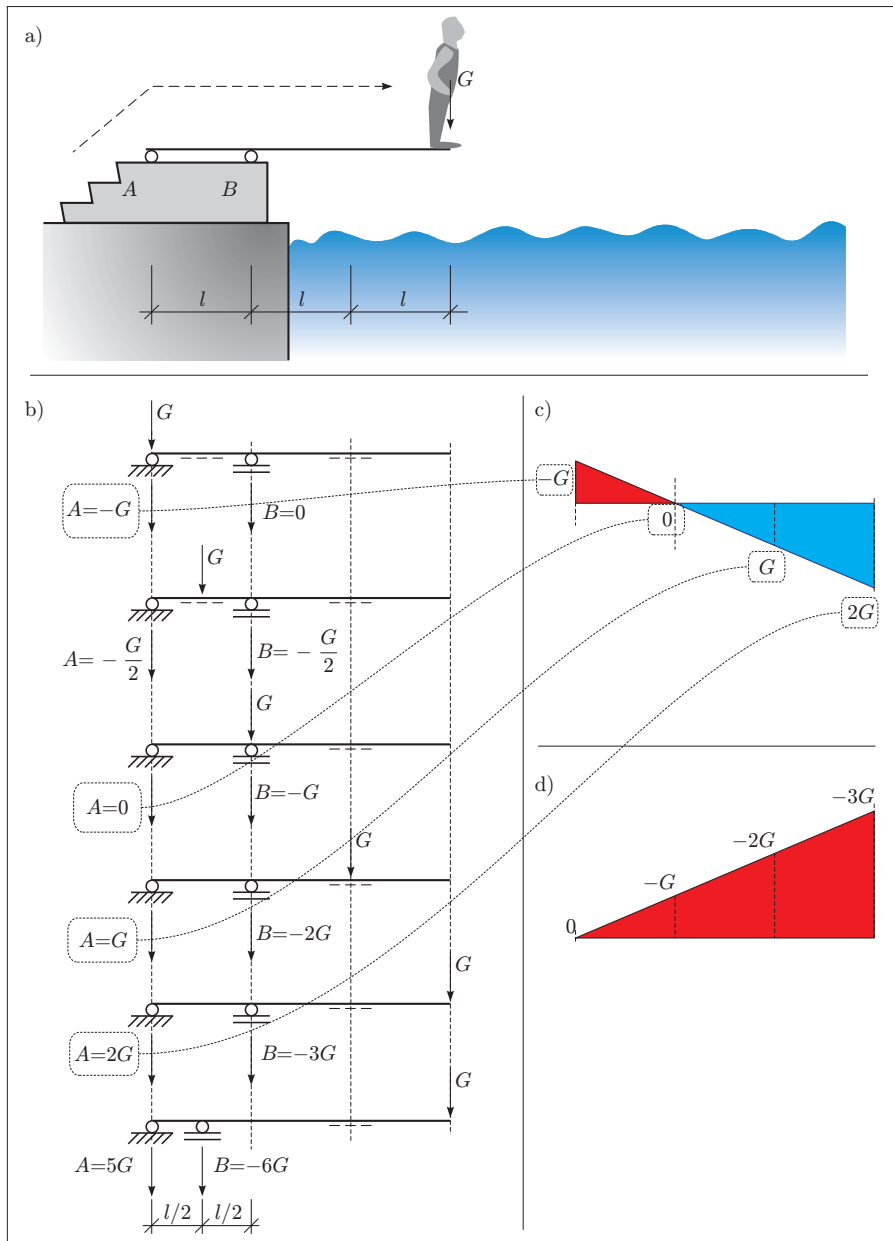


Abb. 5.5. a) Sprungbrett mit Springer, b) Springer=Gewichtskraft an verschiedenen Stellen und Lagerreaktionen, c) Einflusslinie für Lager A und d) Einflusslinie für Lager B.

verschiedenen Stellen des Tragwerkes positioniert. Das Biegemoment wird dabei immer an der Stelle $x = l/4$ bestimmt und der ermittelte Wert am Lastangriffspunkt x angetragen. Werden die einzelnen Punkte verbunden, so ergibt sich die Einflusslinie für das Biegemoment. Die Einflussfunktion ist nun die zugehörige Funktion zum Graphen, nämlich

$$EL(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l/4,$$

$$EL(x) = \underbrace{-\frac{3}{4} \cdot l}_{\text{Spitzenwert}} \cdot \underbrace{\frac{x - \frac{1}{4} \cdot l}{\frac{3}{4} \cdot l}}_{\text{Dreieck}} = -(x - \frac{l}{4}) = (\frac{l}{4} - x), \quad l/4 \leq x \leq l.$$

Merke: Schon in diesem einfachen Fall bedarf es zweier abschnittsweise gültiger Funktionen zur vollständigen Beschreibung der Einflusslinie.

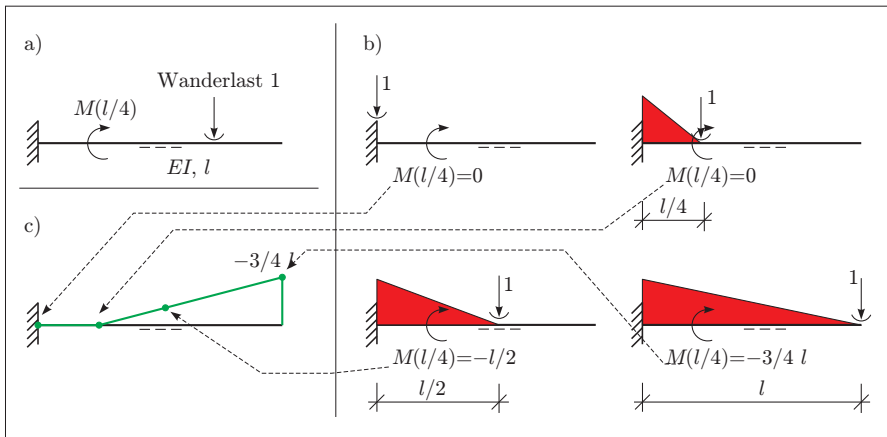


Abb. 5.6. Einflussfunktionen: a) System mit Wanderlast, b) Wanderlast an verschiedenen Positionen und c) Einflusslinie.

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Die Bestimmung der Einflusslinie über die Lastpositionierung und anschließende Auswertung ist bei steigender Tragwerkskomplexität sehr aufwändig. Deshalb wird zur Generierung unter anderem das Prinzip der virtuellen Verrückungen (P.d.v.V.) genutzt. Die zugrunde liegende Idee ist bereits aus der Mechanik bekannt. Die interessierende Größe wird messbar gemacht. Dazu ist für eine Schnittgröße ein Gelenk mit Ersatzkräften einzufügen, siehe Abbildung 5.7. Nun liegen zwei Systeme vor. Das eine System ist mit Belastung und Schnittgrößen versehen und besitzt eine Biegelinie. Das zweite System ist (im einfachsten Fall) kinematisch und verfügt über Verschiebungen, jedoch keine Kräfte. An diesem System werden am Gelenk Verdrehungen φ aufgebracht, die den Momenten entgegenwirken. Unter Anwendung des Arbeitssatzes ergibt sich nun, dass die Verformungen aus dem kinematischen System gerade die Einflusslinie darstellen.

Konstruktion der Einflusslinie mittels P.d.v.V.

Für das eben beschriebene System soll nun über das P.d.v.V. die Einflusslinie bestimmt werden.

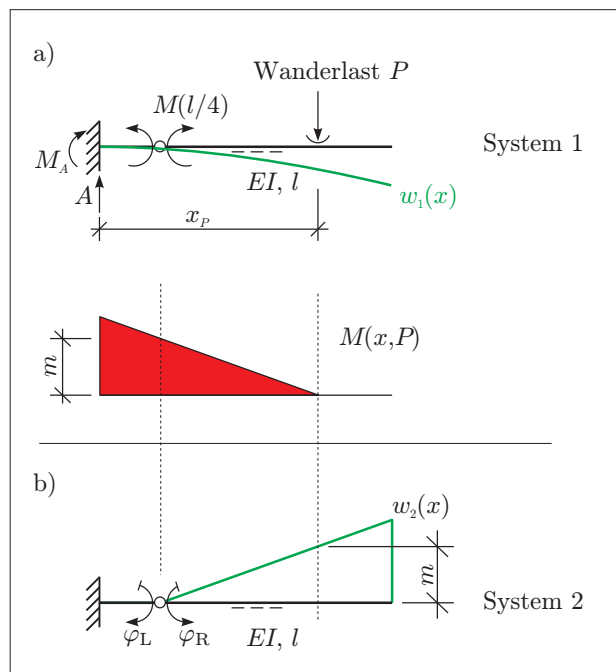


Abb. 5.7. Einflussfunktionen: a) System 1 mit Wanderlast und b) kinematisches System mit Verformungen.

Die Lösung ist in Abbildung 5.7 dargestellt. An der interessierenden Stelle $x = l/4$ wird am System 1 ein Momentengelenk eingefügt und das Biegemoment frei geschnitten. Das System 2 ist identisch zum ersten, jedoch kräftefrei. Es ist damit kinematisch. Die Arbeitsgleichung ergibt nun für die wechselweisen Arbeiten² der beiden Systeme:

$$A_{1,2} = A_{2,1}$$

$$\text{Kraft}_1 \times \text{Weg}_2 = \text{Kraft}_2 \times \text{Weg}_1$$

$$0 = M_A \cdot w_2'(0) + A \cdot w_2(0) - M_L \cdot \varphi_L - M_R \cdot \varphi_R + P \cdot w_2(x_p).$$

Die Verdrehungen müssen so eingestellt werden, dass die Gesamtverdrehung 1 ergibt, also $\tan \varphi_L + \tan \varphi_R = 1$. Es ist darauf zu achten, dass insgesamt negative Arbeit geleistet wird, d.h. das Moment und Verdrehung jeweils entgegengerichtet sind³. Zudem soll gelten $P = 1$. Wird beachtet, dass das jeweilige Moment links und rechts des Schnittes gleich groß ist, so folgt:

² Anwendung des Satzes von Betti.

³ Weiteres dazu im Kapitel 5.3.

$$M_A \cdot 0 + A \cdot 0 - M(l/4) \cdot 1 + 1 \cdot w_2(x_p) = 0,$$

$$M(l/4) = w_2(x_p) = EL_M.$$

Grundsätzlich ist, wie schon erwähnt, zu beachten, dass durch die Verformung des kinematischen Systems die Gesamtarbeit am Gelenk (Schnittmoment $\times \tan(\text{Winkel})$ oder Schnittkraft $\times \text{Weg}$) negativ ist, die beiden Größen also einander entgegen wirken.

Durchlaufträger

Einflusslinien für statisch bestimmte Durchlaufträger werden an vereinfachten Polplänen erzeugt. Vereinfacht deshalb, weil die Haupt- und Nebentpole nicht explizit gezeichnet oder konstruiert werden. Da bei Durchlaufträgern die Scheiben und die Haupt- und Nebentpole schon eingetragen sind, entfällt die Polplankonstruktion. Für einen statisch bestimmten Durchlaufträger werden die Einflusslinien wie folgt konstruiert:

- Gesuchte Zielgröße ist Weggröße: Aufbringen der zugehörigen 1-Kraftgröße am vorliegenden System.
- Gesuchte Zielgröße ist Kraftgröße: Zielgröße freischneiden, dann Aufbringen der zugehörigen 1-Weggröße (Knick von 1 oder Sprung von 1).

In Abbildung 5.8 sind als Beispiele die folgenden Einflusslinien für einen Durchlaufträger dargestellt.

- $EL - A_{i,v}$: vertikale Auflagerreaktion an der Stelle i , wird erreicht durch Freischneiden der Lagerkraft und vertikale Verschiebung um 1 am Punkt i .
- $EL - M_k$: Biegemoment an der Stelle k , wird erreicht durch Freischneiden des Momentes und Aufbringen zweier entgegengesetzter Verdrehung links und rechts von k (der Knoten muss so verschoben werden, dass die Relativverdrehung gerade 1 ist).
- $EL - A_{m,v}$: vertikale Auflagerreaktion an der Stelle m , wird erreicht durch Freischneiden der Lagerkraft und vertikale Verschiebung um 1 am Punkt m .
- $EL - V_k$: Querkraft an der Stelle k , wird erreicht durch Einfügen eines Querkraftgelenks und vertikale Relativverschiebung um 1 am Punkt k .
- $EL - V_{m,l}$: Querkraft an der linken Seite von Stelle m , wird erreicht durch Einfügen eines Querkraftgelenks und vertikale Relativverschiebung um 1 am Punkt m .
- $EL - M_n$: Biegemoment an der Stelle n , wird erreicht durch Freischneiden des Biegemoments und Aufbringen einer 1-Verdrehung bei n .
- $EL - \delta_k$: Absenkung an der Stelle k , wird erreicht durch Aufbringen einer 1-Kraft an der Stelle k .
- $EL - \delta_p$: Absenkung an der Stelle p , wird erreicht durch Aufbringen einer 1-Kraft an der Stelle p .
- $EL - \varphi_k$: Verdrehung an der Stelle k , wird erreicht durch Aufbringen eines 1-Momentes an der Stelle k .
- $EL - \Delta\varphi_m$: Relativverdrehung an der Stelle m , wird erreicht durch Aufbringen eines 1-Momentenpaares an der Stelle m .

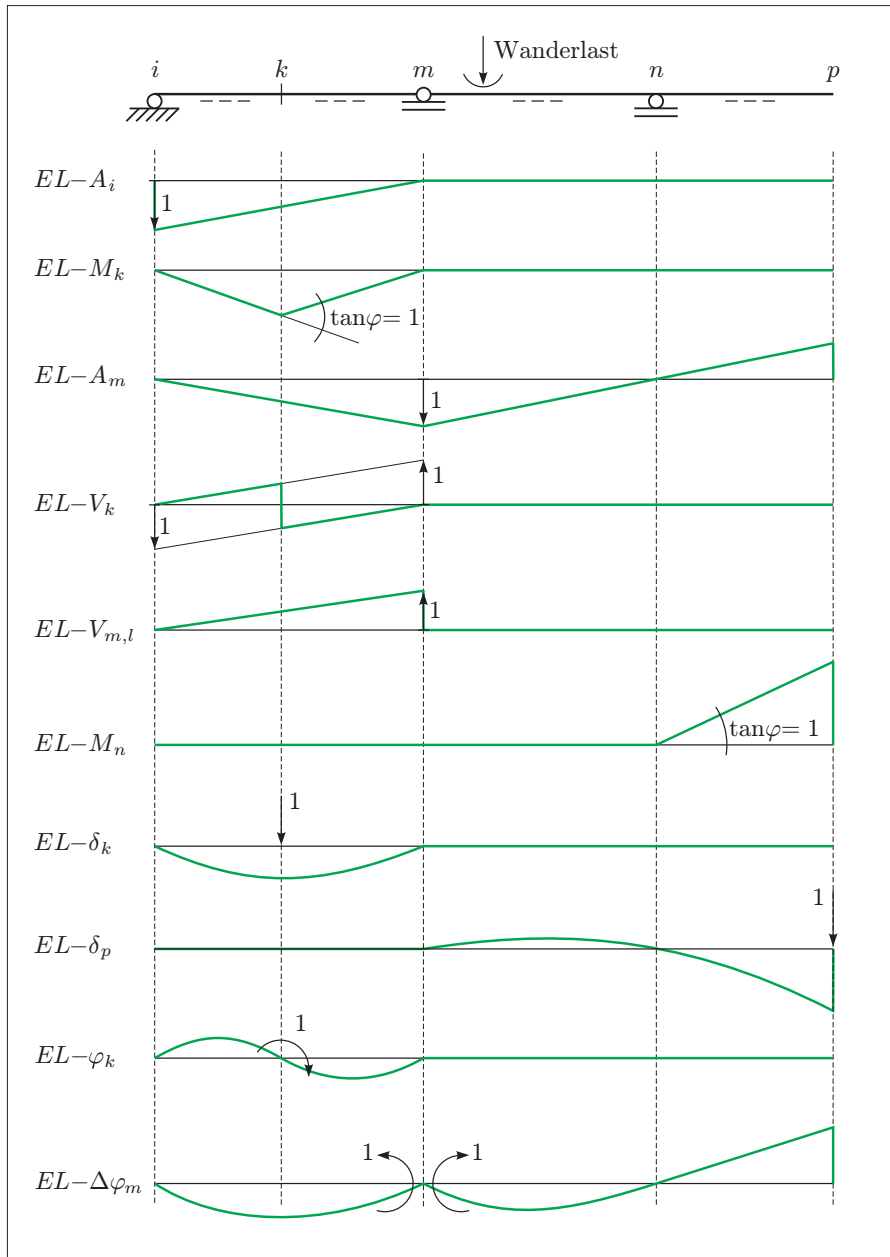


Abb. 5.8. Durchlaufträger mit verschiedenen Einflusslinien. Alle nichtlinearen Verläufe sind hier Funktionen 3. Ordnung.

5.2.3 Greensche Funktionen

Eine Einflusslinie ist für eine Zielgröße an einer bestimmten Stelle definiert, beispielsweise ein Biegemoment an einer Rahmenecke. Die entsprechende Funktion hängt deshalb nur von einer Laufvariablen ab, welche die Position der Wanderlast angibt. Eine *Greensche Funktion* stellt nun die Einflussfunktionen einer Zielgröße an allen Stellen des Bauteils dar. Zusätzlich zu der Variablen für die Position der Wanderlast wird nun auch dem Betrachtungsort eine Variable zugeordnet. Die Einflussfunktion

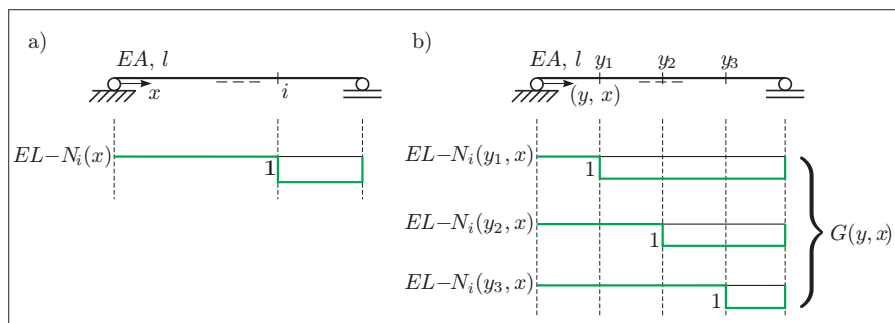


Abb. 5.9. Greensche Funktionen: a) Stab mit Einflusslinie und b) Greensche Funktion, dargestellt für mehrere Stellen des Stabes.

für die Normalkraft an der Stelle i (Abbildung 5.9 a) lautet

$$\begin{aligned} EL - N_i(x) &= 0, & x &\leq i, \\ EL - N_i(x) &= 1, & x &\geq i. \end{aligned}$$

Die Greensche Funktion für die Normalkraft von 1 im Stab (Abbildung 5.9 b) ergibt sich entsprechend zu

$$\begin{aligned} G(y, x) &= 0, & y &\leq x, \\ G(y, x) &= 1, & y &\geq x. \end{aligned}$$

Das Ziel muss natürlich sein, diese Funktion mittels eines Terms darzustellen. Die Schwierigkeit wird schon an diesem einfachen Beispiel ersichtlich: Der Sprung von 1 muss dargestellt werden, und dies ist mit einer stetigen Funktion nicht möglich. Auf die Greenschen Funktionen wird im Rahmen der Einführung in die Randelemente noch vertiefend eingegangen.

Bemessung von Stützen unter Brücken

Von Interesse sind hier die Laststellungen für maximale Druck- und Zugbelastungen. Im statisch bestimmten Fall (Abbildung 5.10 a) ergibt sich durch eine vertikale Auflast nur Druck in Stütze 2, wobei der Maximalwert durch Streckenlasten in den Feldern II und III erzeugt wird. Im statisch unbestimmten Fall, siehe Abbildung 5.10 b, ergibt sich die maximale Drucklast bei Belastung der Felder II, III und V. Werden hingegen die Felder I und IV belastet, so wirkt auf die Stütze eine Zuglast.

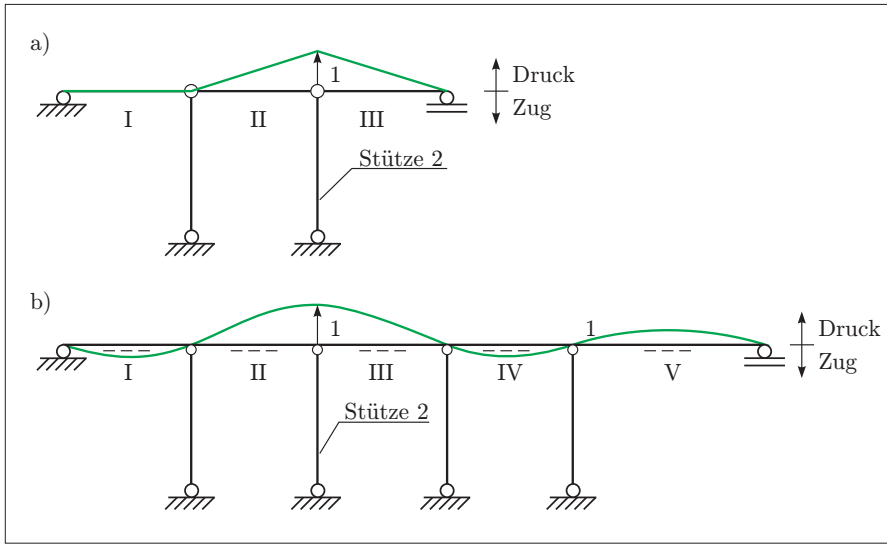


Abb. 5.10. Modelle von a) einer statisch bestimmten Dreifeldbrücke und b) einer statisch unbestimmten Mehrfeldbrücke.

Bestimmung der Elemente der Steifigkeitsmatrizen

Die Elemente der Steifigkeitsmatrizen werden über die innere Arbeit im Element, unter Einwirkung von Einheitsverformungen, gebildet. Für die Arbeit gilt bei Normalkräften

$$a_{ij} = \int_0^l \frac{N_i N_j}{EA} dx \quad \text{mit} \quad N = EAu'$$

und für Biegung entsprechend

$$a_{ij} = \int_0^l \frac{M_i M_j}{EI} dx \quad \text{mit} \quad M = -EIw''.$$

Die Einflusslinien für die Randkräfte der Stab- und Balkenelemente sind in Abbildung 5.11 dargestellt. Die entsprechenden Funktionen für den Balken werden als Hermite-Polynome bezeichnet. Die Kräfte, die zur Erzeugung der entsprechenden Einflusslinien notwendig sind, sind die Einträge in den Steifigkeitsmatrizen.

Die Elemente der Steifigkeitsmatrizen ergeben sich aus den vier Hermite-Polynomen φ_i für den Balken zu

$$k_{ij} = EI \cdot \int_0^l \varphi_i'' \varphi_j'' dx.$$

Die Einträge der Steifigkeitsmatrix für den Stab errechnen sich aus dessen Einheitsverformungen φ_i gemäß

$$k_{ij} = EA \cdot \int_0^l \varphi_i' \varphi_j' dx.$$

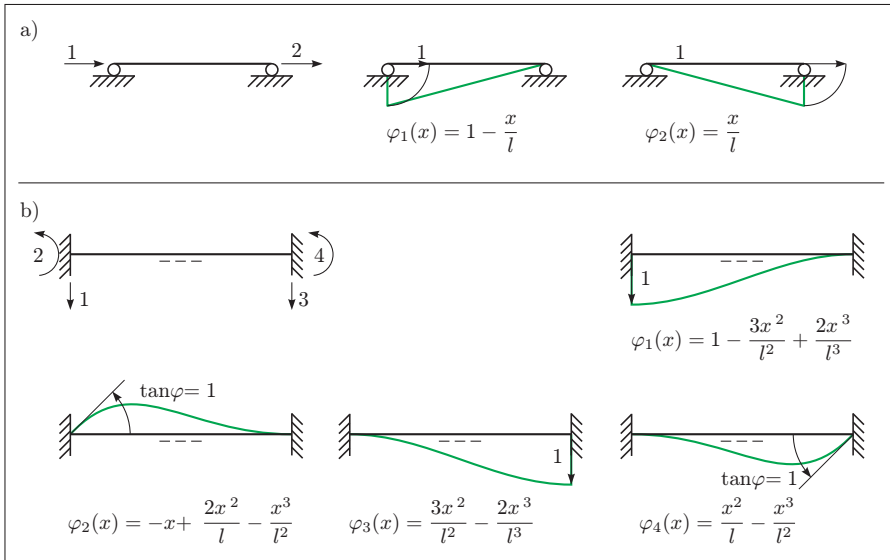


Abb. 5.11. Einheitsverformungen am a) Stab und b) Balken.

Detailliertere Beschreibungen zur Generierung von Steifigkeitsmatrizen finden sich beispielsweise in [20]. Dort werden neben den 1-dimensionalen Bauteilen Balken und Stab auch flächige und räumliche Elemente diskutiert.⁴

Bestimmung der Lastvektoren bei der MVM und FEM

Nicht immer kann und soll ein rechnerisches Modell so gewählt werden, dass äußere Kräfte in Modellknotenpunkten angreifen. Gerade bei der Betrachtung unterschiedlicher Lastfälle würde das zu verschiedenen Netzen bzw. Strukturen führen, was den Rechenaufwand erheblich erhöhen würde.

Deshalb werden Lasten im Feld, also Kräfte, die zwischen den Knoten liegen, auf die Knoten verteilt. Die Verteilung der Kräfte auf die Knoten erfolgt entsprechend der Einflussfunktionen der Randkräfte. Diese Funktionen sind bereits als Hermite-Polynome eingeführt worden. Die Knotenkräfte infolge der Streckenlasten $q_n(x)$ und der Einzellasten F_m – angreifend an der Stelle $(x_{F,m})$ – ergeben sich aus:

$$p_i = \sum_n \int_0^l \varphi_i(x) \cdot q_n(x) \, dx + \sum_m \varphi_i(x_{F,m}) \cdot F_m.$$

⁴ Der Begriff *finite Elemente* stammt aus der Mathematik, wo er für Funktionen begrenzter Trägerlänge steht. Im Bauwesen ist es jedoch üblich, die mathematischen Modelle nach praktischen Vorbildern zu benennen, z.B. Balken oder Platte.

5.2.4 Das Schema F

Die Bestimmung von Einflusslinien folgt einem generellen Ablaufschema, welches für die einzelnen Systeme und Zielgrößen variiert wird. In diesem Abschnitt soll die Vorgehensweise erläutert werden.

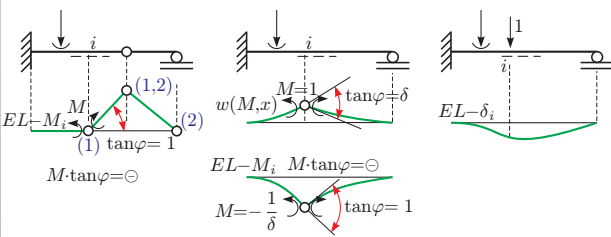
System	statisch bestimmt	statisch unbestimmt	statisch bestimmt und unbestimmt
Zielgrösse	Kraftgrösse	Kraftgrösse	Weggrösse
Gelenk einfügen	ja	ja	nein
Polplan	ja	nein	nein
1-Verformung aufbringen	ja	ja, aber nicht direkt möglich	nein
1-Last aufbringen	nein	ja	ja
Verschiebungsfigur	ja	nein	nein
Verformung unter 1-Last: δ	nein	liefert neg. Normierungsfaktor: $-1/\delta$	Stützstelle der EL
Momentenfläche	nicht vorhanden	ja, aus Last: $1 \cdot (-1/\delta)$	ja
Punktabenkungen durch 1-Lasten an den kritischen Punkten und Überlagerung mit dem massgeblichen Momentenverlauf	nein	ja	ja
Feldverformungen durch Integration der Momentenverläufe, z.B. mittels ω -Verfahren	nein	ja	ja
Biegelinie	nicht vorhanden	= Einflusslinie	= Einflusslinie
Beispiel	 The example section contains three diagrams illustrating the determination of influence lines for a continuous beam with two spans. The first diagram shows the beam with a unit load '1' at position 'i' and a virtual displacement 'delta' at the support. The second diagram shows the beam with a unit load '1' at position 'i' and a virtual displacement 'delta' at the support. The third diagram shows the beam with a unit load '1' at position 'i' and a virtual displacement 'delta' at the support.		

Abb. 5.12. Vorgehensschema zur Ermittlung von Einflusslinien.

Die Vorgehensweise ist je nach Zielgrösse und System zu wählen, wie in Abbildung 5.12 dargestellt ist. Allgemein kann gesagt werden, dass für die gesuchte Einflussfunktion, die duale Grösse als Belastung aufzubringen ist, d.h., wird für eine Kraftgrösse die Einflussfunktion gesucht, so ist eine Weggrösse von Eins (Knick

oder Versatz) als Last anzusetzen. Wird die Einflussfunktion für eine Weggröße gesucht, so ist eine Kraft von Eins (Kraft oder Moment) als Belastung aufzubringen. Grundsätzlich ist die Einflussfunktion die aus der Belastung resultierende Biegelinie, also eine Verformungsfigur. Die Erzeugung dieser Verformungsfigur wird in der Praxis auf unterschiedliche Arten, je nach vorliegendem Fall (siehe Abbildung 5.12), gelöst.

Soll für ein statisch bestimmtes System die Einflussfunktion für eine Kraftgröße ermittelt werden, so ist eine Weggröße von Eins aufzubringen. Dafür ist ein entsprechendes Gelenk einzufügen. Dadurch wird das System kinematisch und die Verschiebungsfigur kann mit Hilfe einer Polplankonstruktion ermittelt werden, siehe Abbildung 5.12 zweite Spalte.

Ist das System statisch unbestimmt, so ändert sich das Vorgehen, denn das direkte Aufbringen einer Eins-Weggröße ist nicht mehr möglich. Dazu muss ein kleiner Umweg gegangen werden. Es wird wieder ein Gelenk in das System eingebaut. Anschließend wird ein Kräfte- bzw. Momentenpaar gemäß dem Positivbild als Belastung aufgebracht und die durch die zwei Kräfte verursachte Relativverschiebung bzw. -verdrehung bestimmt⁵. Die Einskräfte werden dann so skaliert, dass die berechnete Relativweggröße den Wert Eins erhält. Damit insgesamt negative Arbeit geleistet wird, ist der Skalierungsfaktor mit -1 zu multiplizieren. So erhält man den so genannten negativen Normierungsfaktor (siehe Abbildung 5.12 dritte Spalte).

Als letztes verbleibt die Erzeugung von Einflusslinien für Weggrößen. Das Verfahren ist unabhängig vom Grad der statischen Unbestimmtheit. Als Belastung ist die zur Weggröße duale Kraftgröße als Belastung aufzubringen und die Verformungsfigur z.B. mit Hilfe des ω -Verfahrens zu bestimmen. Das Vorgehen ist in Abbildung 5.12 letzte Spalte beschrieben.

Einflussfunktionen geben eine genaue Aussage über die Wirkung von Belastungen auf eine bestimmte Zielgröße. Im Umkehrschluss kann gefolgert werden, dass die Güte eines Ergebnisses aus einer EDV-Berechnung direkt mit der Fähigkeit des Programms zusammenhängt, wie gut es eine Einflussfunktion für die entsprechende Zielgröße darzustellen vermag. Dies ist wichtig zu wissen, weil sich einige Einflussfunktionen schwer darstellen lassen – beispielsweise Querkräfte bei Platten – und andere sehr gut – beispielsweise Absenkungen beim Balken. Näheres hierzu findet sich in [12] und auch in [16].

5.2.5 Auswertung von Einflusslinien

Eine Einflusslinie gibt den Einfluss einer Belastung an einer Stelle des Tragwerkes auf eine zuvor festgelegte Zielgröße, an einer zumeist anderen Stelle, des Tragwerkes an. Die Auswertung der Einflusslinie, d.h. die Berechnung der Schnittgröße unter einer bestimmten Lastzusammenstellung, ist deshalb ein wichtiger Aspekt des Themenkomplexes.

Die Einflusslinie gibt an, welchen Effekt eine Last auf eine Zielgröße hat. Als Belastung werden in der Regel Einzellasten aufgebracht. Der Wert der Einflussfunktion am Lastangriffspunkt gibt den Faktor an, mit dem die Last zu multiplizieren ist, um den Wert der Zielgröße zu erhalten. Eine Streckenlast kann nun als Vielzahl differentiell kleiner Einzellasten angesehen werden, folglich muss jede Teillast

⁵ Beispielsweise mit Hilfe des Kraftgrößenverfahrens durch Überlagerung des Momentenverlaufes mit sich selbst.

mit dem entsprechenden Faktor aus der Einflusslinie multipliziert werden. Im Bereich der elastischen Statik gilt das Superpositionsprinzip, so dass die Effekte aller Einwirkungen aufaddiert werden müssen. Die Aufsummierung erfolgt durch die Überlagerung der Streckenlastfunktion $q(x)$ mit der Einflussfunktion EL_Z :

$$Z = \int_0^l EL_Z \cdot q(x) dx + \sum_i F_i \cdot EL_Z(x_{F,i}).$$

Beispiel

Am gezeigten System (Abbildung 5.13) soll das Biegemoment an der Stelle i unter Verwendung der Einflusslinie ermittelt werden.

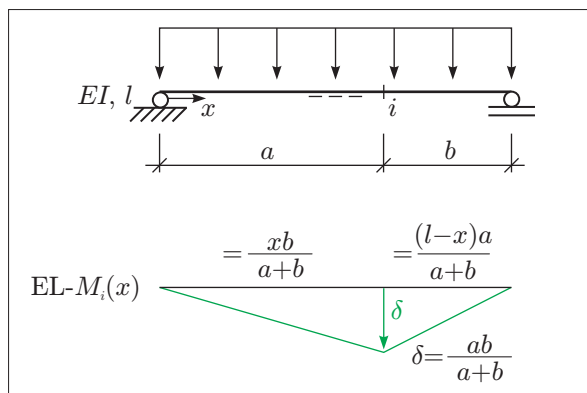


Abb. 5.13. Biegebalken mit Einflusslinie für das Moment an der Stelle i .

Die Auswertung erfolgt durch Überlagerung der Belastung $q(x)$ mit der zweiteiligen Einflussfunktion $EL - M(x)$ unter Anwendung der Integraltafeln, siehe Seite 34:

$$M = \int_0^l M \cdot q(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot a \cdot q + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot b \cdot q.$$

Für den Sonderfall $a = b = l/2$ ergibt sich $\delta = l^2/4 \cdot 1/l = l/4$ und somit

$$M(x = l/2) = \int_0^l M \cdot q(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \frac{l}{2} \cdot q + \frac{1}{2} \cdot \delta \cdot \frac{l}{2} \cdot q = \frac{ql^2}{8}.$$

5.3 Polplankonstruktion

5.3.1 Drehscheibenstatik

Zur Bestimmung von Einflusslinien für Kraftgrößen an statisch bestimmten Systemen werden Verschiebungsfiguren verwendet. Die Grundlage hierfür sind Polpläne, in denen die Kinematik der Systeme mit Drehpunkten (Hauptpolen), Gelenken (Nebenpolen) und Verbindungen (Scheiben) beschrieben wird. Einige Details sollen in diesem Abschnitt beschrieben werden.

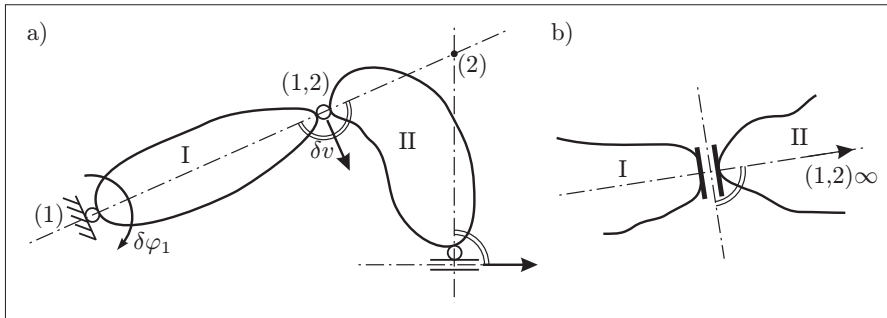


Abb. 5.14. a) Polplan eines einfachen Systems mit Bewegungsrichtungen der Scheiben. b) Regel für den Ort des Nebenpols zweier durch ein Querkraftgelenk angeschlossener Scheiben.

5.3.2 Regeln der Polplankonstruktion

Der Vollständigkeit wegen sollen die Regeln zur Polplankonstruktion auch hier aufgeführt werden. Die Abbildungen 5.14 und 5.15 dienen zur Verdeutlichung der unten beschriebenen Konstruktionsregeln. Zum einen wird mit der Polplankonstruktion das Zeichnen der Verschiebungsfigur an einem kinematischen System möglich, und zum anderen lässt sich überprüfen, ob ein System kinematisch ist. Denn nur dann lässt sich der Polplan widerspruchsfrei zeichnen.

1. Ein festes Gelenklager bildet den Hauptpol der angeschlossenen Scheiben.
2. Ein Biegemomentengelenk bildet den Nebenpol der angeschlossenen Scheiben.
3. Die Senkrechte zur Bewegungsrichtung eines verschieblichen Gelenklagers bildet den geometrischen Ort des Hauptpols der angeschlossenen Scheiben, siehe Abbildung 5.14 a.
4. Der Nebenpol zweier, durch einen verschieblichen Anschluss (V-Gelenk, N-Gelenk), verbundener Scheiben liegt auf jeder Senkrechten zur Bewegungsrichtung des Anschlusses im Unendlichen (parallel verschieblich), siehe Abbildung 5.14 b.
5. Die Hauptpole (i) , (j) zweier Scheiben I und J und ihr gemeinsamer Nebenpol (i, j) liegen auf einer Geraden.
6. Die drei Nebenpole dreier Scheiben I , J , K liegen auf einer Geraden: (i, j) - (i, k) - (j, k) , siehe Abbildung 5.15.
7. Fallen (i, j) und (i, k) zusammen, so liegt an diesem Punkt auch (j, k) , sofern keiner der Hauptpole (i) , (j) , (k) im Unendlichen liegt.

5.3.3 Kinematik der Verschiebungsfiguren

Eine Verschiebungsfigur arbeitet wie ein Getriebe. Alle beweglichen Elemente werden als Scheiben bezeichnet und sind aneinander gekoppelt. Die Verbindungen (Nebenpole) müssen nicht zwangsläufig Bestandteil des realen Tragwerkes sein, sondern können auch außerhalb liegen. Gleiches gilt für die Hauptpole (Drehpunkte). Der verschiebbliche Teil des Systems wird mittels Drehpunkten (Hauptpole) gelagert.

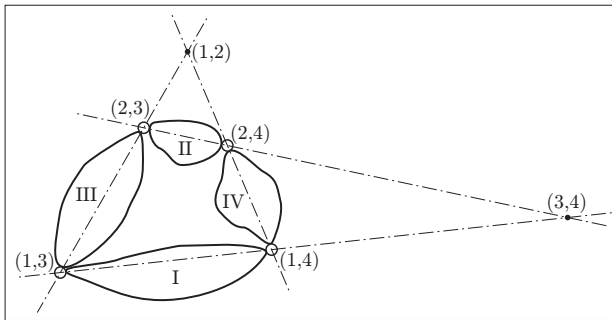


Abb. 5.15. Konstruktion der Nebenpole aller beteiligten Scheiben.

Das Prinzip der virtuellen Verrückungen setzt kleine Verformungen $(\delta u, \delta \varphi)$ voraus. Deshalb muss bei der Konstruktion der Verschiebungsfigur beachtet werden, dass

- ... die eingepprägten Verformungen senkrecht zum Radius (Verbindung Nebenpol zu Hauptpol) eines jeden Punktes erfolgen, also auf den Kreistangenten,
- ... die Verdrehungen innerhalb einer Scheibe identisch sind⁶ und
- ... ausgehend von der eingepprägten Verschiebung konstruiert werden muss.

Beispiel 1: Kinematik im Polplan

Die Kinematik innerhalb eines Polplans ist in Abbildung 5.16 dargestellt. Es soll die Einflusslinie für das Biegemoment an der Stelle i ermittelt werden. Die Scheibe I wird im Uhrzeigersinn um 45° ($\tan 45^\circ = 1$) um den Hauptpol (1) gedreht. Hierdurch verschiebt sich der Nebenpol (1,3) rechtwinklig zur Verbindungslinie (1)-(1,3)-(3) auf Position (1,3)'. Dies führt zu einer Verdrehung der Scheibe III um einen Winkel φ_3 . Der Nebenpol (2,3) bewegt sich rechtwinklig zur Verbindungslinie (2)-(2,3)-(3) auf Position (2,3)' und die Scheibe II verdreht sich mit dem Nebenpol (2,3). Gleichzeitig bewegt sich der Nebenpol (3,4) senkrecht zu Verbindungslinie (3)-(3,4)-(4) auf Position (3,4)', was zu einer Verdrehung der Scheibe IV führt. Werden nun die Haupt- und Nebenpole auf die Horizontale projiziert, so entsteht aus dem recht komplizierten Polplan ein ganz einfaches Abbild, denn die genannten Nebenpole liegen alle an der gleichen Stelle. Weil die Scheibe III nicht zum Lastgurt gehört (Balken verläuft vertikal), tritt diese Scheibe in der Projektion für die Auswertung vertikaler Lasten nicht in Aktion. Für die Konstruktion der Einflusslinie werden nur die Scheiben I (Ausgangsscheibe) sowie II und IV (Lastgurt) benötigt.

Beispiel 2: Hauptpole im Unendlichen

Die maßgeblichen Hauptpole liegen *im Unendlichen*, siehe Abbildung 5.17. In diesem Beispiel ist die Einflusslinie für die Normalkraft im Pendelstab i zu bestimmen. Aus dem Polplan folgt, dass die beiden Hauptpole der Scheiben III und IV, zwischen denen die 1-Verschiebung anzutragen ist, im Unendlichen liegen. Folglich kann in

⁶ Jeder Punkt auf einer Scheibe verdreht sich um den gleichen Winkel um den Hauptpol.

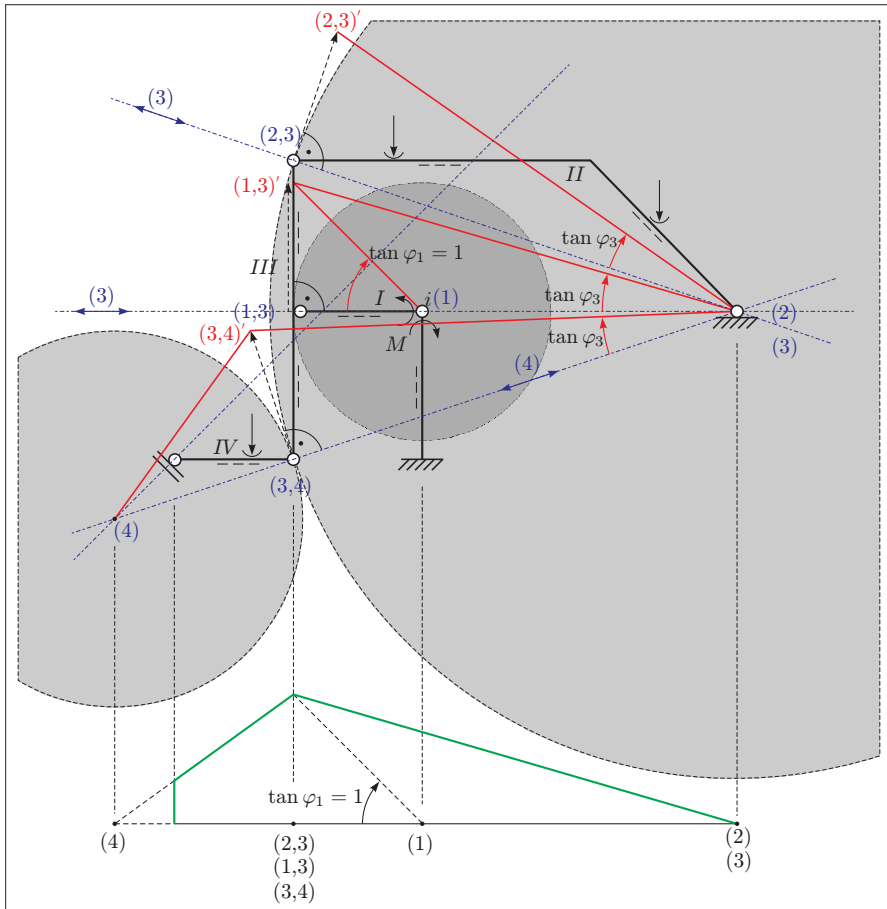


Abb. 5.16. Kinematik in einem Polplan

der horizontalen Projektion keine Verschiebung angetragen werden, weil die Lage der Hauptpole, in Bezug auf die Projektionslinie, nicht genau angegeben werden kann. Deshalb ist die Konstruktion der Verschiebungsfigur mit einer frei wählbaren Verschiebung δ_1 durchzuführen. Die Verschiebung δ_3 ergibt sich nun abhängig von δ_1 . Der Skalierungsfaktor, mit der die Verschiebung δ_1 multipliziert werden muss, damit die Relativverschiebung $\delta_{3,4}$ gerade 1 ist, ergibt sich hier aus $n = (\delta_3 - \delta_1)^{-1}$. Weil die Verschiebungsfigur gemäß den Regeln kleiner Verschiebungen konstruiert ist, ist der verwendete Maßstab unerheblich. Für die korrekten Verschiebungswerte sind die Messwerte lediglich mit dem Skalierungsfaktor zu multiplizieren. Aus der skalierten Verschiebungsfigur ist die vertikale Absenkung des Gelenkes im Lastgurt abzulesen und als Stützpunkt der Einflusslinie zu verwenden.

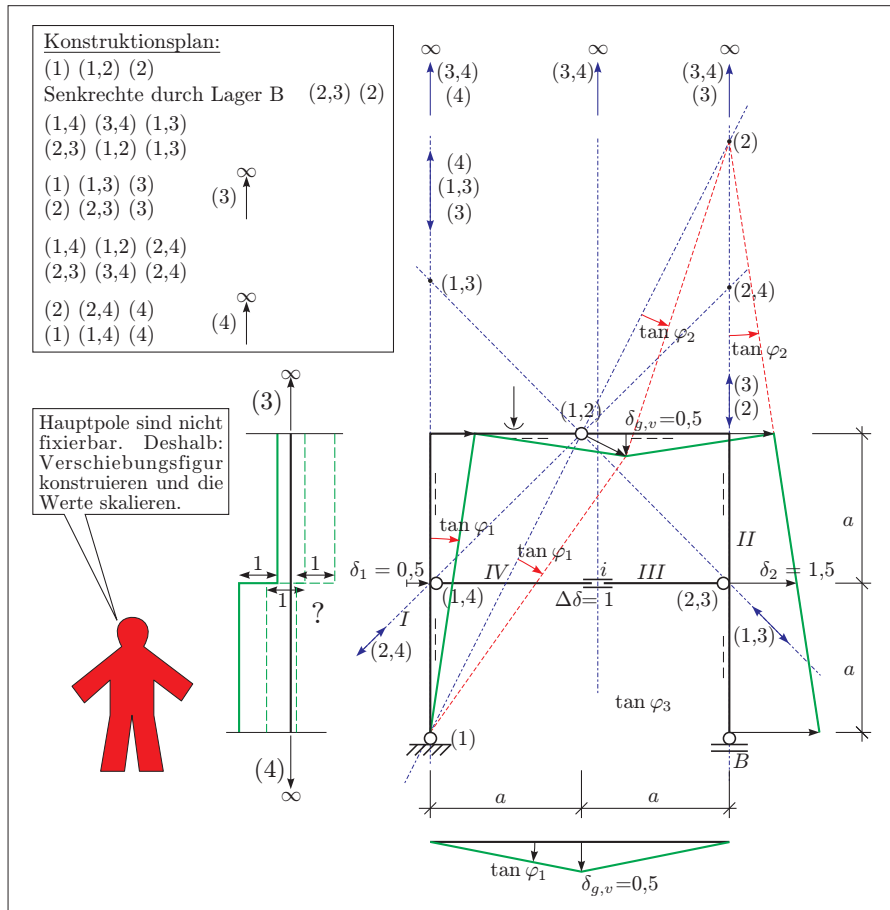


Abb. 5.17. Rahmen, bei dem entscheidende Hauptpole im Unendlichen liegen.

5.3.4 Reihenfolge der Haupt- und Nebenpole

Aus dem Prinzip der virtuellen Verrückungen ergibt sich, dass die am Gelenk verrichtete Arbeit negativ sein muss, damit die Verschiebungsfigur gleich der Einflusslinie ist. Die Richtung einer Verformung wird demzufolge über eine Arbeitsbilanzierung bestimmt.

In Abbildung 5.18 sind verschiedene Reihenfolgen von Haupt- und Nebenpolen dargestellt. Die Verschiebungsrichtungen sind jeweils so zu wählen, dass die Gesamtarbeit kleiner als Null ist. Dabei kann einer der beiden Terme auch positiv sein. Die Absenkung δ , die bei den Einflusslinien für das Biegemoment anzutragen ist, ergibt sich aus den Verdrehungen ($\tan \varphi$) der Scheiben. So gilt für Abbildung 5.18 c beispielsweise mit $\varphi_1 = \delta/(a+b)$ und $\varphi_2 = \delta/b$:

$$1 = \tan(\varphi_1) + \tan(\varphi_2) = \frac{\delta}{a+b} + \frac{\delta}{b} \Rightarrow \delta = \frac{(a+b)b}{2b+a}.$$

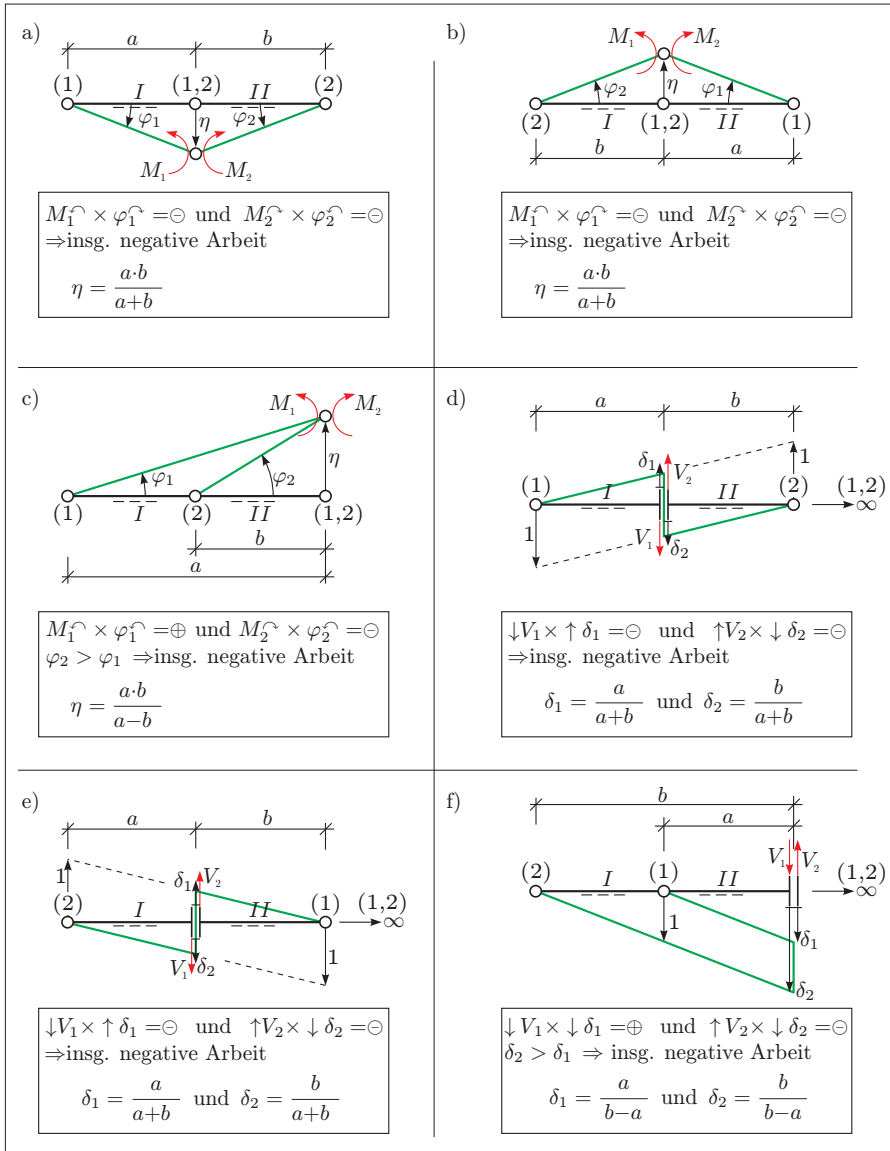


Abb. 5.18. Verschiedene Reihenfolgen von Hauptpolen, Nebenpolen und Scheiben.

5.4 Betti, Green und Mohr

5.4.1 Mathematische Ideen mit Tragweite

Der Satz von Betti und die Greenschen Identitäten enthalten auf kompakte Weise viele Prinzipien der Statik und Mechanik. Die Mohr'sche Analogie macht die Biegelinienberechnung einfach. Deshalb sollen sie hier kurz vorgestellt werden.

5.4.2 Herleitung der Greenschen Identitäten für den Stab

Für die Herleitung der Greenschen Identitäten wird die partielle Integration benötigt. Für zwei zunächst beliebige, in den Grenzen von a bis b stetig differenzierbare Funktionen u und v gilt:

$$\int_a^b u' v \, dx = [u v]_a^b - \int_a^b u v' \, dx.$$

Der Differentialoperator⁷ angewandt auf die Funktion u wird bei der partiellen Integration auf die zweite Funktion v übertragen. Auf der rechten Seite ist neben dem Integralausdruck ein Randterm, bei dem nur die Randdaten vom betrachteten Gebiet berücksichtigt werden müssen, entstanden.

Ausgangspunkt der Herleitung ist die Differentialgleichung des Stabes,

$$-EAu''(x) = p(x).$$

Die Gleichung wird mit einer Funktion $\hat{u}(x)$ multipliziert und auf die linke Seite wird die partielle Integration angewendet. Man erhält den folgenden Ausdruck.

$$-\int_0^l EAu'' \hat{u} \, dx = -[EAu' \hat{u}]_0^l + \int_0^l EAu' \hat{u}' \, dx = \int_0^l p \hat{u} \, dx$$

Die Gleichung lässt sich so umformen, dass man eine Identität erhält, d.h. die rechte Seite der Gleichung wird zu Null.

$$-\int_0^l EAu'' \hat{u} \, dx + [EAu' \hat{u}]_0^l - \int_0^l EAu' \hat{u}' \, dx = 0$$

Mit $EAu' = N$, $\hat{u}' = \hat{N}/EA$ und $-EAu'' = p$ ergibt sich die *erste Greensche Identität*

$$G(u, \hat{u}) = \underbrace{\int_0^l p \hat{u} \, dx}_{\delta A_{a, \text{Feld}}} + \underbrace{[N \hat{u}]_0^l}_{\delta A_{a, \text{Rand}}} - \underbrace{\int_0^l \frac{N \hat{N}}{EA} \, dx}_{\delta A_i} = 0.$$

Alle Ausdrücke in der Greenschen Identität sind Arbeitsterme, d.h. Kraft $\times$ Weg. Es wird unterschieden zwischen der inneren Arbeit und der äußeren Arbeit im Gebiet bzw. im Feld und auf dem Rand.

Um die *zweite Greensche Identität* zu erhalten, werden zunächst die Funktionen u und $\hat{u}$ vertauscht. Für diesen Fall ergibt sich analog zur ersten Variante:

⁷ In diesem Fall die erste Ableitung einer Funktion nach x .

$$G(\hat{u}, u) = \int_0^l \hat{p} u \, dx + [\hat{N}u]_0^l - \int_0^l \frac{\hat{N}N}{EA} \, dx = 0.$$

Wird die erhaltene Identität von der ersten subtrahiert, so ergibt diese Differenz gerade die zweite Greensche Identität:

$$B(u, \hat{u}) = G(u, \hat{u}) - G(\hat{u}, u) = \int_0^l p \hat{u} \, dx + [N\hat{u} - \hat{N}u]_0^l - \int_0^l \hat{p}u \, dx = 0.$$

Die zweite Greensche Identität sagt nichts anderes aus, als das *die Arbeiten, die die Kräfte des u -Systems auf den Wegen des $\hat{u}$ -Systems leisten gleich den Arbeiten sind, die die Kräfte des $\hat{u}$ -Systems auf den Wegen des u -Systems leisten*. Die Anwendung dieser Identitäten wird im Abschnitt 5.4.4 behandelt.

5.4.3 Herleitung der Greenschen Identitäten für den Balken

Wichtiges Hilfsmittel für die Herleitung der Greenschen Identitäten ist auch hier wieder die partielle Integration. Im Falle der Balkendifferentialgleichung wird die partielle Integration zweimalig angewendet. Das Vorgehen ist für die Funktionen u und v dargestellt. Für die zwei Funktionen ergibt sich zunächst

$$\int_a^b u'' v \, dx = [u'v]_a^b - \int_a^b u' v' \, dx.$$

Wird der rechte Integralausdruck wieder partiell integriert, so ergibt sich

$$\int_a^b u' v' \, dx = [uv']_a^b - \int_a^b u v'' \, dx.$$

Wird dies wieder in die vorige Gleichung eingesetzt, so erhält man

$$\int_a^b u'' v \, dx = [u'v - uv']_a^b + \int_a^b u v'' \, dx.$$

Das bedeutet, dass der Differentialoperator, die zweimalige Ableitung einer Funktion, von der ersten Funktion u auf die zweite Funktion v übertragen wird. Das Vorgehen ist jetzt wieder mit dem beim Stab identisch.

Die Differentialgleichung des Balkens

$$EIw^{IV}(x) = p(x)$$

wird mit einer Testfunktion $\hat{w}$ multipliziert und danach zweimal partiell integriert:

$$\int_0^l EIw^{IV} \hat{w} \, dx = [EIw''' \hat{w} - EIw'' \hat{w}']_0^l + \int_0^l EIw'' \hat{w}'' \, dx.$$

Unter Beachtung der differentiellen Beziehungen zwischen den Schnittgrößen am Balken erhält man die erste Greensche Identität für den Balken:

$$G(w, \hat{w}) = \underbrace{\int_0^l p \hat{w} \, dx}_{\delta A_{a, \text{Feld}}} + \underbrace{[V\hat{w} - M\hat{w}']_0^l}_{\delta A_{a, \text{Rand}}} - \underbrace{\int_0^l \frac{M\hat{M}}{EI} \, dx}_{\delta A_i} = 0.$$

Entsprechend kann auch hier die zweite Greensche Identität für den Balken formuliert werden:

$$B(w, \hat{w}) = \int_0^l p \hat{w} dx + [V \hat{w} - M \hat{w}' - \hat{V} w - \hat{M} w']_0^l - \int_0^l \hat{p} w dx = 0.$$

Die Anwendung der Greenschen Identitäten wird im folgenden Kapitel vorgeführt.

5.4.4 Anwendung der Greenschen Identitäten

Zunächst waren die Funktionen w und $\hat{w}$ bzw. u und $\hat{u}$ beliebig wählbare stetig differenzierbare Funktionen. Betrachtet man w und u als Funktionen aus einem Lastzustand und $\hat{w}$ und $\hat{u}$ als Testfunktionen, so zeigt sich, dass die gängigen Prinzipien der Mechanik in den Greenschen Identitäten enthalten sind.

Prinzip der virtuellen Verrückungen

Mit w und seinen Ableitungen aus einem Lastzustand und $\hat{w} = \delta \hat{w}$ als eine virtuelle Verrückung und den zugehörigen Ableitungen als Testfunktion ergibt sich das Prinzip der virtuellen Verrückungen. Die Kraftgrößen aus dem Lastzustand werden mit virtuellen (δ) Verformungen überlagert:

$$G(w, \delta \hat{w}) = 0 = \int_0^l p \delta \hat{w} dx + [V \delta \hat{w} - M \delta \hat{w}']_0^l - \int_0^l \frac{M \delta \hat{M}}{EI} dx.$$

Wird z.B. auf ein statisch bestimmtes System das Prinzip angewandt, so vereinfacht sich obige Gleichung deutlich. Da das System kinematisch wird, ist das Aufbringen der virtuellen Verschiebung kräftefrei, so dass der letzte Integralausdruck wegfällt. Die Randterme werden ebenfalls zu Null, da entweder die virtuelle Verrückung Null ist, oder die Kraftgröße, mit Ausnahme der gesuchten Auflagerkraft. Somit ist lediglich die stückweise lineare Funktion (virtuelle Verrückung) mit der Belastung zu überlagern, um die gesuchte Größe zu erhalten.

Prinzip der virtuellen Kräfte

Mit $\hat{w} = \delta \hat{w}$ und seinen Ableitungen aus einem virtuellen Lastzustand und w samt Ableitungen als Folge der Belastung auf dem System ergibt sich das Prinzip der virtuellen Kräfte. Die Kraftgrößen aus dem virtuellen Kraftzustand (δ) werden mit realen Verformungen resultierend aus dem Lastfall $p(x)$ überlagert:

$$G(\delta \hat{w}, w) = 0 = \int_0^l \delta \hat{p} w dx + [\delta \hat{V} w - \delta \hat{M} w']_0^l - \int_0^l \frac{\delta \hat{M} M}{EI} dx.$$

Man erhält das aus dem Kraftgrößenverfahren bekannte Ergebnis; Die Überlagerung der Momentenflächen aus Endzustand und einem mit einer Einskraft belasteten System, liefert die zur aufgebrachten Einskraft duale Weggröße.

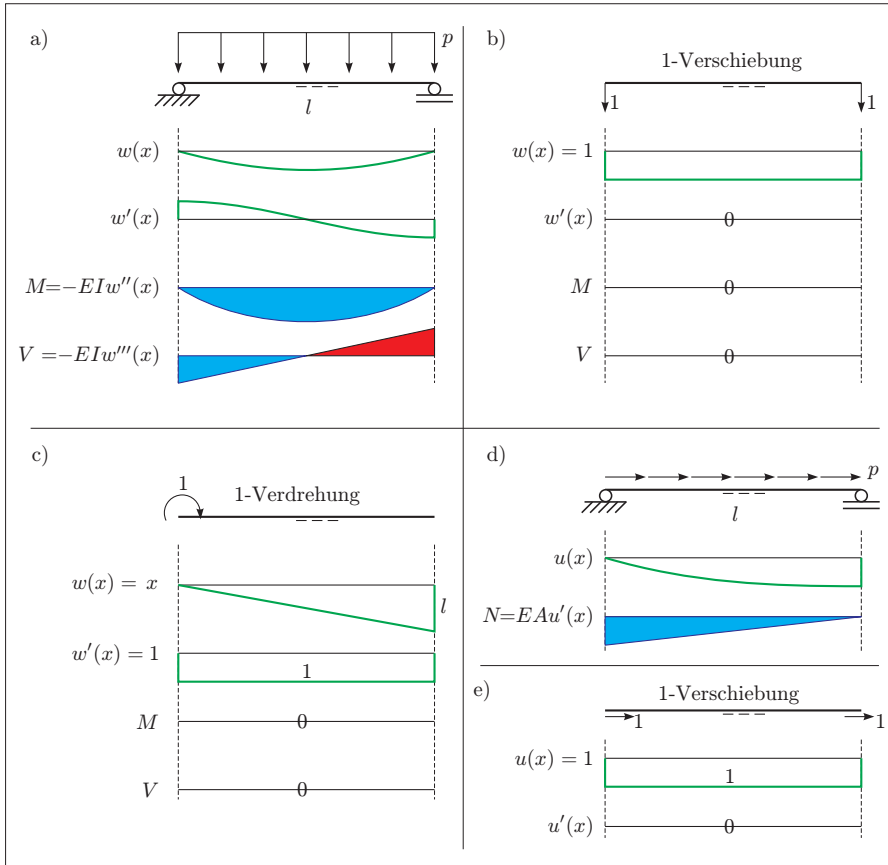


Abb. 5.19. Greensche Identität und Gleichgewicht: a) Balken auf zwei Stützen, b) 1-Verschiebung, c) 1-Verdrehung, d) Zug-Druckstab mit Streckenlast und e) 1-Verschiebung in horizontaler Richtung.

Kräfte- und Momentengleichgewicht

Wird ein Lastzustand mit einer Starrkörperbewegung überlagert, so folgt aus der ersten Greenschen Identität die entsprechende Gleichgewichtsformulierung am System.

Die Überlagerung des statischen Systems, siehe Abbildung 5.19 a, mit der Starrkörperbewegung in Abbildung 5.19 b liefert:

$$\begin{aligned}
G(w, \hat{w}) &= \int_0^l p \underbrace{\hat{w}}_{=1} dx + V(l) \underbrace{\hat{w}(l)}_{=1} - M(l) \underbrace{\hat{w}'(l)}_{=0} \\
&\quad - V(0) \underbrace{\hat{w}(0)}_{=1} + M(0) \underbrace{\hat{w}'(0)}_{=0} + \int_0^l \underbrace{M \hat{M}}_{=0} \frac{dx}{EI} = 0 \\
&\Rightarrow \downarrow \sum F_V = 0 : \quad p \cdot l + V(l) - V(0) = 0.
\end{aligned}$$

Die Überlagerung des statischen Systems in Abbildung 5.19 a mit der Starrkörperbewegung in Abbildung 5.19 c liefert das Momentengleichgewicht um das linke Auflager:

$$\begin{aligned}
G(w, \hat{w}) &= \int_0^l p \underbrace{\hat{w}}_{=x} dx + V(l) \underbrace{\hat{w}(l)}_{=l} - M(l) \underbrace{\hat{w}'(l)}_{=1} \\
&\quad - V(0) \underbrace{\hat{w}(0)}_{=0} + M(0) \underbrace{\hat{w}'(0)}_{=1} + \int_0^l \underbrace{M \hat{M}}_{=0} \frac{dx}{EI} \\
&\Rightarrow \sum M = 0 : \quad \frac{p l^2}{2} + V(l) \cdot l - M(l) + M(0) = 0.
\end{aligned}$$

Die Überlagerung des statischen Systems in Abbildung 5.19 d mit der Starrkörperbewegung in Abbildung 5.19 e liefert die horizontale Kräftegleichgewichtsformulierung:

$$\begin{aligned}
G(u, \hat{u}) &= \int_0^l q \underbrace{\hat{u}}_{=1} dx + \underbrace{N(l)}_{=0} \hat{u}(0) - N(0) \underbrace{\hat{u}(0)}_{=1} - \int_0^l \underbrace{N \hat{N}}_{=0} \frac{dx}{EA} \\
&\Rightarrow \sum F_H = 0 : \quad q l - N(0) = 0.
\end{aligned}$$

Satz von Betti

Der Arbeitssatz nach Betti, oder auch Satz von Betti, ist identisch mit der zweiten Greenschen Identität. In Worten ausgedrückt, lautet dieser:

Die Arbeiten, die die Kräfte des ersten Systems w auf den Wegen des zweiten Systems $\hat{w}$ leisten, sind identisch zu den Arbeiten, die die Kräfte des zweiten Systems $\hat{w}$ auf den Wegen des ersten Systems w leisten.

Die mathematische Formulierung hierzu lautet

$$\begin{aligned}
B(w, \hat{w}) &= \underbrace{\int_0^l p \hat{w} dx + [V \hat{w} - M \hat{w}']_0^l + \int_0^l \frac{M \hat{M}}{EI} dx}_{\delta_{1,2}} \\
&\quad - \underbrace{[\hat{V} w - \hat{M} w']_0^l - \int_0^l \hat{p} w dx - \int_0^l \frac{\hat{M} M}{EI} dx}_{\delta_{2,1}}.
\end{aligned}$$

und ist gerade die zweite Greensche Identität für den Balken.

5.4.5 Mohrsche Analogie

Die Zusammenhänge der Schnittgrößen des Balkens werden über die Differentialgleichung beschrieben:

$$EI w^{IV} = p.$$

Dabei gelten die bereits gezeigten Zusammenhänge $M = -EI \cdot w''$ und $-EI \cdot M'' = p$. Die beiden zweistufigen Integrationen von $-EI \cdot w''$ nach M und von $-EI \cdot M''$ nach p unterliegen nun gemäß der Mohrschen Analogie demselben Operator, weil für beide Ausgangsfunktionen dieselben Randbedingungen gelten. Der Operator muss lediglich in der Lage sein, eine Funktion zweifach zu integrieren. Die Mohrsche Analogie ist die prinzipielle Grundlage des ω -Verfahrens. Hierbei kann mittels der ω -Tafeln die Bestimmung von Biegelinien infolge Momentenflächen durchgeführt werden, gleichwohl die Tafeln ursprünglich zur Ermittlung der Momente aus Streckenlasten gedacht waren.

5.5 Einführung in die Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente (FEM, engl.: *finite element method*) ist in den letzten Jahren zu einem gebräuchlichen Werkzeug in den planenden Ingenieurbüros geworden. Die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten des Näherungsverfahrens eröffnen neue Möglichkeiten der Berechnung und der Konstruktion.

In diesem Kapitel soll dem Leser auf einfache Weise der Grundgedanke der FEM vermittelt werden. Ein Verständnis für diese Näherungsmethode erleichtert dem Ingenieur den Umgang mit einer FE-Software.

5.5.1 Alles bewegt sich und keiner wird nass

Die FEM ist vergleichbar mit den ganz einfachen und selbstverständlichen Handlungen, die man macht, um etwas über die Eigenschaften eines Objektes zu erfahren. Wenn man wissen möchte, wie schwer z.B. ein Apfel ist (vorausgesetzt, man hat keine Waage zur Hand), dann wiegt man ihn in der Hand, bewegt ihn also auf und ab. Man versetzt ihn in Bewegung. Ähnlich verfährt man, wenn man einen kleinen Steg über einen Bach überqueren möchte, aber nicht weiß, ob er stabil genug ist. Man belastet ihn vorsichtig mit einem geringen Gewicht und beurteilt dann die Bewegung. Geht das alles sehr leicht vonstatten, d.h. sind die Verformungen unter einer niedrigen Belastung sehr groß, so beurteilt man diesen Überweg als ungeeignet. Diese Brücke ist nicht stabil genug.

Und genau dieses Testen einer Struktur oder eines Objektes wendet auch die FE-Methode an. Natürlich nicht genauso, wie oben beschrieben, aber in einem ähnlichen Sinne. Diese Methode wird natürlich in einen mathematischen Rahmen gebettet, der für die Gültigkeit dieser Theorie benötigt wird.

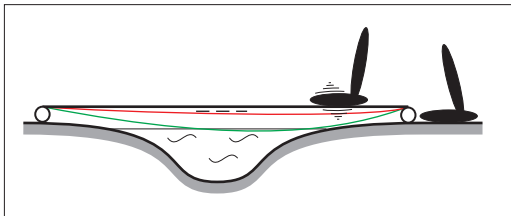


Abb. 5.20. Hält die Brücke?
Eine vorsichtige Belastung mit
einem Fuß gibt einen Aufschluss
darüber!

5.5.2 Eine einfache Herleitung

Ausgangspunkt der Betrachtungen sei eine einfache Differentialgleichung zweiter Ordnung, in diesem Fall die Differentialgleichung des Stabes:

$$-EAu''(x) = p(x).$$

Dabei ist $u(x)$ die Lösung der Differentialgleichung, E ist der E -Modul, A ist die Querschnittsfläche und $p(x)$ ist die Belastungsfunktion.

Um eine Lösung bei einem konkreten System zu finden, werden zusätzlich Angaben über die Geometrie und die Randbedingungen benötigt. Die Lösung $u(x)$ muss dabei zweimal stetig differenzierbar sein, d.h. $u'(x)$ und $u''(x)$ muss bestimmt werden können, ansonsten gibt es keine weiteren Anforderungen an die Lösung.

Nun wollen wir einen etwas anderen Weg einschlagen, um das Problem Stab zu beschreiben. Wir denken uns eine zunächst beliebige stetig differenzierbare Funktion aus, mit der wir die Differentialgleichung *testen* wollen. Diese Testfunktion wird im Folgenden $\varphi(x)$ genannt. Mit der Funktion φ wackeln wir an dem Stab. Die Differentialgleichung wird mit φ multipliziert, und es wird über die Systemlänge integriert. Die partielle Integration dieser Gleichung führt dann auf das Ergebnis

$$\int_0^l EA u'(x) \varphi'(x) dx - [EA u' \varphi]_0^l = \int_0^l p(x) \varphi(x) dx.$$

In den Klammerausdruck kann die Normalkraft für den Ausdruck $EA u'(x)$ eingesetzt werden, d.h. hier werden, da $x = 0$ und $x = l$ betrachtet werden, Einzellasten an den Rändern berücksichtigt. Der Einfachheit halber lassen wir diesen Ausdruck weg und legen fest, dass keine Einzellasten an den Rändern angreifen dürfen. Damit erhält man

$$\int_0^l EA u'(x) \varphi'(x) dx = \int_0^l p(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in V. \quad (5.1)$$

An dieser Gleichung gibt es mehrere Dinge, die erwähnt werden sollen. Zunächst einmal wurde auf der rechten Seite geschrieben, dass diese Gleichung für alle Testfunktionen aus dem Raum V gilt. Anders gesagt, wenn ich eine Lösung $u(x)$ der Gleichung finde für alle Testfunktionen aus dem Raum V , dann muss die Funktion $u(x)$ nicht Lösung der Gleichung sein, wenn sich der Raum V verändert. Die Lösung ist abhängig von dem Raum, in der die Lösung gesucht wird. Es kann ja durchaus sein, dass die Lösung $u(x)$ zwar im Raum V , aber nicht im Raum V_h vorhanden ist. Dann findet man eine andere Lösung $u_h(x)$.

Die Ausdrücke der linken und rechten Seite sind bekannte Ausdrücke. Links, die innere Arbeit, rechts, die äußere Arbeit. Bereits im Kapitel 5.1 *Energie und Arbeit*

wurde sich mit dem elementaren Thema auseinander gesetzt. Die Aussage, dass die innere Arbeit A_i gleich der äußeren Arbeit A_a ist, finden wir jetzt hier wieder.

Gleichung (5.1) kann auch über die Forderung: *Finde eine Lösung $u(x)$ so, dass obige Gleichung für alle Testfunktionen $\varphi(x)$ erfüllt ist!* ausgedrückt werden. Die Anforderungen an die Lösung sind nach dieser Gleichung weniger stark, die Lösung $u(x)$ muss lediglich einmal stetig differenzierbar sein. Daher wird diese Formulierung auch die *schwache Form* der Gleichgewichts genannt. Was aber ganz entscheidend ist, die Lösung der schwachen Form stimmt mit der Lösung der Differentialgleichung überein.

Bis jetzt wird die exakte Lösung der Differentialgleichung durch die Formulierung der schwachen Form gesucht. Es soll nun aber ausreichen, wenn wir eine Näherungslösung, also nicht mehr die exakte Lösung, finden. Dafür werden bestimmte Testfunktionen $\varphi_h(x)$ vorgegeben. Im Fall des Stabes sind dies lineare Funktionen, die bekannten Ansatzfunktionen oder Einheitsverformungen. Die Lösung u wird hierbei auf die Knoten beschränkt, d.h. man berechnet eine punktweise Lösung und erhält damit einen Lösungsvektor der Knotenverschiebungen $\mathbf{u}$. Was zwischen den Knoten passiert, beschreiben die Ansatzfunktionen:

$$u_h = \sum u_i \varphi_{hi}(x).$$

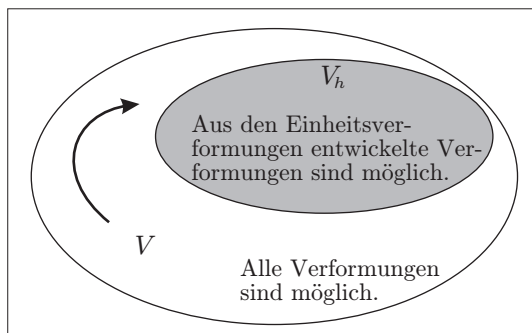


Abb. 5.21. Der Raum V , in dem die exakte Lösung enthalten ist, wird durch die FEM auf den Unterraum V_h abgebildet.

Wenn die Knotenverformungen u_i bekannt sind, ist auch die Näherungslösung bekannt, da sie aus der Multiplikation der Knotenverformungen u_i mit den Einheitsverformungen $\varphi_{hi}(x)$ entwickelt wird. Die exakte Lösung u aus dem Ansatzraum V wird auf den Unterraum V_h projiziert und man erhält so die Näherungslösung u_h , siehe Abbildung 5.21. Es können die Ansatzfunktionen und die Näherungslösung u_h in die Gleichung (5.1) eingesetzt werden:

$$\sum_i \int_0^l EA u_i \varphi'_{hi}(x) \varphi'_{hk}(x) dx = \int_0^l p(x) \varphi_{hk}(x) dx \quad \forall \varphi_h \in V_h.$$

Es entsteht ein Gleichungssystem mit k Gleichungen. Das Gleichungssystem ist das bekannte System aus dem Kapitel 3.1.

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Es entspricht dabei

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= \{EA \int_0^l \varphi'_{hi}(x) \varphi'_{hk}(x) dx\} \\ \mathbf{u} &= \{u_i\} \\ \mathbf{f} &= \left\{ \int_0^l p(x) \varphi_{hk}(x) dx \right\}.\end{aligned}$$

Damit wurde auf einfache Weise das Grundlegende der FEM hergeleitet. Diese Methode wird auch *Galerkinverfahren* genannt. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Ansatzfunktionen und die Testfunktionen identisch sind.

5.5.3 Die moderne Schreibweise

Die Einführung einer anderen Schreibweise erspart einem zum einen einiges an Schreibarbeit und zum anderen vereinfacht es insgesamt die Handhabung der im vorigen Kapitel verwendeten Ausdrücke.

Für die rechte Seite der Gleichung wird das so genannte L_2 -Skalarprodukt eingeführt. Die Schreibweise dafür lautet

$$\int_0^l p(x) \varphi_h(x) dx := (p, \varphi_h).$$

Die linke Seite wird über eine Bilinearform ausgedrückt:

$$\int_0^l EA u_i \varphi'_h(x) \varphi'_h(x) dx := a(u_h, \varphi_h).$$

Damit lässt sich die schwache Form des Gleichgewichts schreiben:

$$a(u_h, \varphi_h) = (p, \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h \subset V.$$

Dies erlaubt nun eine kompakte Darstellung der FE-Gleichung für den Stab. Für stabförmige Tragelemente (Fachwerkstab, Balken und Seil) sind die Verformungen in den Knoten bei Verwendung von linearen Ansatzfunktionen für Differentialgleichungen 2. Ordnung und für kubische Ansatzfunktionen für Differentialgleichungen 4. Ordnung exakt. Die Werte zwischen den Knoten sind nur dann exakt, wenn die Originalbelastung aus in den Knoten angreifenden Einzellasten besteht.

Die Lösungen für Flächentragwerke (Scheibe, Platte, Schale, Membrane) stimmen grundsätzlich auch in den Knoten nicht mit der exakten Lösung überein. Da aber nur in speziellen Fällen die exakte Lösung bekannt ist, bietet die FEM als Näherungsverfahren die Möglichkeit, auch komplexe Tragwerke überhaupt berechnen zu können.

Für die möglichst exakte Lösung eines Problem gilt grundsätzlich, je kleiner die Elemente, desto genauer ist die Lösung. Die FE-Lösung nähert sich mit zunehmender Diskretisierung der exakten Lösung an.

Der nächste Abschnitt befasst sich einführend mit dem Thema der Fehlerberechnung und deren Verwendung in der FE-Technik.

5.5.4 Fehlerberechnung in der FEM

Ein Vergleich der exakten und der Näherungslösung kann auf verschiedene Arten durchgeführt werden. Die Ergebnisse sind dabei von der Aussage her unterschiedlich zu beurteilen und der Aufwand, der zur Berechnung erforderlich ist, kann gering bis sehr umfangreich sein. Ein Einblick in die Vergleichsmethoden wird unten gegeben. Es ist anzumerken, dass die exakte Lösung einer Differentialgleichung in fast allen Fällen nicht zur Verfügung steht.

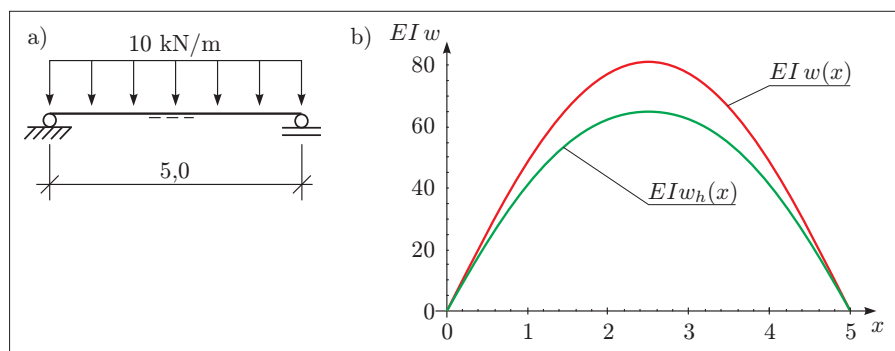


Abb. 5.22. Die Biegelinie für das System in a) wurde einmal exakt, d.h. durch Lösen der Differentialgleichung, und einmal über ein Näherungsverfahren, die FEM, berechnet. Der Unterschied ist in b) dargestellt.

Die Differenz zwischen der exakten und der Näherungslösung wird über $e = u - u_h$ ausgedrückt. In Abbildung 5.22 sind die exakte Lösung w und die Näherungslösung w_h an einem einfachen Beispiel zu sehen. Diese Darstellung bedeutet, dass jeder Punkt der exakten Lösung mit der Näherungslösung verglichen werden muss, um den Fehler e bestimmen zu können. Das wären unendlich viele Punkte! Dies ist sicher eine sehr genaue Methode, in der Praxis aber nicht umzusetzen. Würde man sich z.B. auf die Knotenpunkte der FE-Methode zum Vergleich beschränken, so ist der Aufwand relativ gering. Dafür ist das Ergebnis aber nicht mehr so scharf, wie bei der vorigen Methode, da z.B. bei stabförmigen Elementen die Knotenwerte exakt sind. Somit erhält man bei dieser Methode die Aussage: *Die Näherungslösung stimmt mit der exakten Lösung überein*. Es ergeben sich durch die beiden Methoden völlig unterschiedliche Aussagen. Die Aussage mit der ersten Methode (jeder Punkt wird verglichen) ist: *Die Lösungen stimmen **nur** in den Knotenpunkten überein*. Die zweite Methode liefert die schärfere Aussage: *Die Werte stimmen an allen verglichenen Punkten überein*.

Um also den Fehler beurteilen zu können, muss immer die Methode genannt werden, mit der man einen Vergleich, also die Fehlerberechnung, durchführt. Die FEM hat die Eigenschaft, dass der Fehler, je kleiner die Elemente werden, immer geringer wird. Man spricht hier von Konvergenzverhalten. Das Ziel in der praktischen Anwendung der FEM ist nicht, den exakten Fehler für jeden Punkt im System ausgegeben zu bekommen, sondern eine Information über den relativen Fehler für

jedes Element zu erhalten. Somit erhält man einen Fehlerindikator, mit dem man feststellen kann, wo der Fehler besonders groß ist und wo er eher gering ist. Die Elemente mit großem Fehler werden dann verfeinert und somit dort das Ergebnis verbessert.

Das führt auf die adaptive Netzverfeinerung. Das Netz kann mit dieser Methode so angepasst werden, dass der Fehler möglichst gering wird. Dabei wird nicht überall die Elementgröße verringert, sondern nur an den Stellen, an denen es wirklich erforderlich ist. Folglich wird der Rechenaufwand nur so weit erhöht, wie es für eine optimale Lösung erforderlich ist.

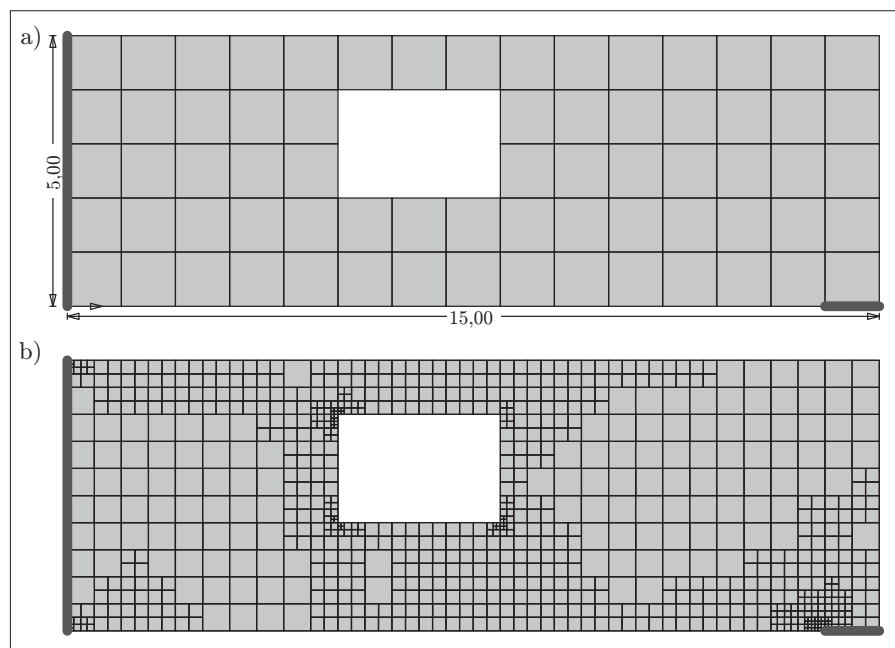


Abb. 5.23. a) Scheibe mit Fensteröffnung mit Lastfall Eigengewicht, b) global Adaptiv verfeinertes Netz. Dort, wo Singularitäten auftreten (Fensterecken und Spänge in den Lagerungsbedingungen), wird das Netz verfeinert.

Die oben beschriebenen Fehlerindikatoren berechnen sich aus den Fehlerlasten im Element und den so genannten Sprungtermen auf den Elementkanten. Der Originallastfall p , d.h. die rechte Seite der Differentialgleichung, ist bekannt, der FE-Lastfall p_h kann aus der FE-Lösung durch Einsetzen in die gegebene Differentialgleichung bestimmt werden⁸. Aus diesen beiden Werten für jedes Element kann ein Gebietsfehler⁹ aus der Differenz der beiden Lastwerte berechnet werden. Weiter ist von der

⁸ Anwenden des Differentialoperators auf die Lösung u_h liefert den Lastfall p_h .

⁹ Die Differenz zwischen den beiden Lastfällen p und p_h wird Gebietsfehler genannt, da dieser für die gesamte Elementfläche gilt.

exakten Lösung der Differentialgleichung bekannt, dass an den Elementkanten keine Spannungssprünge vorhanden sind. Die FE-Lösung aber liefert Spannungssprünge auf den Elementkanten, welche als Sprungterme bezeichnet werden und ebenfalls zur Fehlerindikatorberechnung herangezogen werden.

Aus diesen beiden Fehleranteilen (Gebiets- und Kantenlasten) wird durch Aufsummieren über die einzelnen Elemente der Gesamtfehler berechnet. Daraus kann unter Verwendung der Elementfehler der anteilige Fehler berechnet und damit ein Indikator erzeugt werden. Zur visuellen Darstellung werden die Elemente mit einem hohen Fehleranteil dunkel und die mit einem geringen Fehleranteil hell eingefärbt. Damit können dem Anwender die Bereiche, welche einen hohen numerischen Fehler erzeugen, kenntlich gemacht werden. In Abbildung 5.24 sind zwei eingefärbte FE-Netze zu sehen. Das Netz in Abbildung 5.24 a hat noch viele dunkel gefärbte Elemente, während das Netz in Abbildung 5.24 b eine stärkere Gleichverteilung der Graufärbung aufweist, was einer gleichmäßigen Verteilung des Fehlers entspricht.

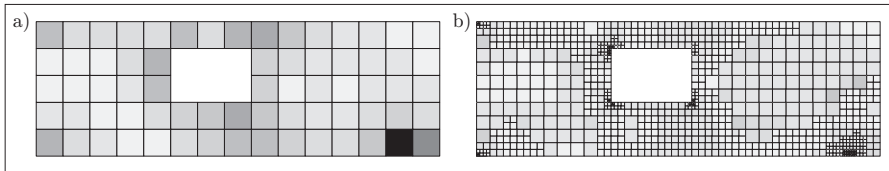


Abb. 5.24. Farbige dargestellte Fehlerindikatoren für die einzelnen Elemente für a) das Ausgangsnetz und b) das adaptiv verfeinerte Netz.

Die bisher beschriebene Methode wird als eine *globale adaptive Netzverfeinerung* bezeichnet, da eine globale Betrachtungsweise für die Fehlerberechnung verwendet wird, ohne z.B. eine lokale Größe wie die Spannung an der Stelle (x, y) zu betrachten. Hat man eine ganz bestimmte Zielgröße zu untersuchen, so ist es sinnvoll, das Augenmerk auf genau diese Größe zu legen. Das führt auf die Verwendung der Greenschen Funktion (bzw. Einflussfunktion) bei der Fehlerindikatorberechnung. Der globale Fehler, also $p - p_h$, wird mit dem Fehler in der Greenschen Funktion gewichtet. Diese Methode wird *lokale Fehlerbestimmung* oder auch *zielorientierte Fehlerbestimmung* genannt. Es kann dann durchaus sein, dass Bereiche, die zwar im globalen betrachtet einen großen Fehler aufweisen, durch die Gewichtung mit dem Fehler in der Greenschen Funktion bei der Netzanpassung aber nicht verfeinert werden. Ein solches FE-Netz ist in Abbildung 5.25 dargestellt.

Beispiel

Als Beispiel für die Fehlerindikatorberechnung und die adaptive Netzverfeinerung soll die in Abbildung 5.23 a dargestellte Scheibe unter Lastfall Eigengewicht dienen. Verwendet man einen globalen Fehlerindikator, so wird das in Abbildung 5.23 b dargestellte Netz nach vier Anpassungsschritten erzeugt. D.h. der Fehler wird für das Ausgangsnetz berechnet, anschließend eine Netzanpassung durchgeführt, mit dem neuen Netz wieder eine Fehlerberechnung durchgeführt etc. Die Fehlerindikatoren für das Ausgangsnetz und das adaptiv verfeinerte Netz sind in Abbildung 5.24 abgebildet. Je dunkler ein Element dargestellt wird, desto größer ist der Anteil am

Gesamtfehler. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Einfärbung der Elemente im verfeinerten Netz nahezu gleichmäßig ist, was einer Gleichverteilung des Gesamtfehlers entspricht. Dieses erzeugte Netz ist universell einsetzbar und kann für die meisten Fragestellungen bestens eingesetzt werden.

Will man aber eine bestimmte Zielgröße, wie z.B. die Spannung σ_{xx} an der Stelle $(10, 5/4, 5)$, betrachten und diese möglichst genau haben, so empfiehlt sich die Verwendung eines zielorientierten Fehlerindikators. Das mit diesem Indikator erzeugte Netz ist in Abbildung 5.25 abgebildet und unterscheidet sich deutlich von dem Netz in Abbildung 5.23 b. Es ist zu erkennen, dass vor allem der Bereich um die Zielgröße besonders stark verfeinert wurde, die restlichen Bereiche, mit Ausnahme der Singularität am rechten Auflager, wurden nicht verfeinert.

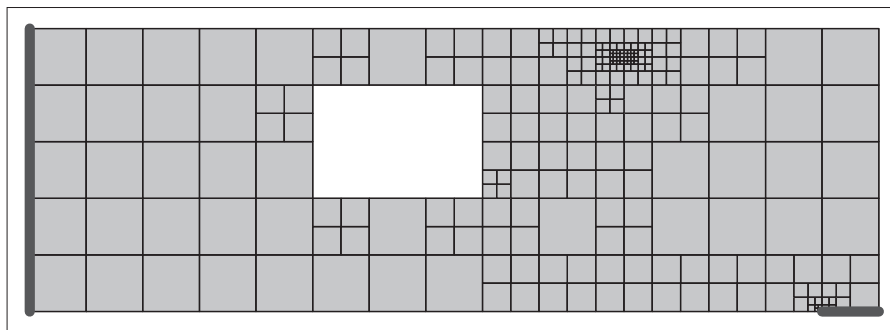


Abb. 5.25. Mit einem lokalen, oder auch zielorientiert genannten, Fehlerschätzer adaptiv verfeinertes Netz. Im Bereich der Zielgröße wird das Netz stark verdichtet.

5.6 Einführung in das Thema Randelemente

5.6.1 Mehr als Stab und Balken

Für die Behandlung von räumlichen Tragwerken (Scheiben, Platten, Schalen) ist die Lösung der zugehörigen Differentialgleichungen viel zu aufwändig, um wirtschaftlich angewendet zu werden. Deshalb sind Näherungsverfahren entwickelt worden, die mit vertretbarem Rechenaufwand akzeptable Ergebnisse liefern. Etabliert haben sich die Methode der finiten Elemente und die Methode der Randelemente (REM, engl.: *boundary element method, BEM*).

Die FEM liefert für eindimensionale Bauteile (Stab, Balken) mindestens an den Knoten die gleichen Ergebnisse wie die analytischen Verfahren. Das bedeutet, dass die FEM die Differentialgleichungen nach Bernoulli (Biegung) oder Timoschenko (Schub) nur im Sonderfall exakt lösen kann. Die Anwendung der FEM für eindimensionale Bauteile wurde als Matrizenverschiebungsmethode vorgestellt.

Für zweidimensionale Bauteile hingegen löst die FEM die Differentialgleichungen grundsätzlich nicht mehr genau. Die Güte der Ergebnisse hängt hier von der

Diskretisierungsdichte ab. Mit zunehmender Zahl der Freiheitsgrade nimmt der Rechenaufwand erheblich zu, was zu langen Rechenzeiten bei genauen Modellen führen kann. Ein Weg der Reduktion des Rechenaufwandes führt über die Vereinfachung der Modelle, wie beispielsweise in [11] dargestellt wird.

Ein anderer Weg ist die Anwendung der REM. Hierbei werden nur die Ränder des Tragwerkes mit Freiheitsgraden versehen. Die Bestimmung der Zielgrößen im umrandeten Gebiet findet über die Auswertung der Einflussfunktionen statt. Die Güte der Ergebnisse ist für einige Probleme deutlich höher als bei der FEM, obgleich die Zahl der Freiheitsgrade deutlich geringer ist. Aus diesem Grund wird sie auch als Maßstab für die Ergebnisse aus FEM-Berechnungen verwendet, siehe beispielsweise [12]. Zum vertiefenden Eigenstudium wird beispielsweise [15] empfohlen, woran sich auch dieser Abschnitt orientiert.

5.6.2 Die Idee...

...hinter der REM ist einfach: Wenn für ein Objekt die Randwerte der Zielgröße bekannt sind, so lässt sich die Zielgröße an jeder Stelle des Objektes aus den Randwerten ableiten.

- Die Funktionswerte einer Geraden sind eindeutig bestimmt, wenn die Werte von Anfangs- oder Endpunkt sowie die Steigung der Geraden bekannt sind. Ähnlich kann auch mit Funktionen höherer Ordnung vorgegangen werden.
- Die Temperaturverteilung in einem Raum folgt ebenfalls der Idee der REM. Die Temperatur verändert sich zwischen den gegenüberliegenden Wänden linear. Unter der Annahme, dass der Einfluss an der gegenüberliegenden Wand gerade Null ist, ergibt sich in der Raummitte der Einfluss jeder gegenüberliegenden Wand zu 0,5. Weil der Raum jedoch vier Wände mit zwei Spannrichtungen hat, wird die Temperatur aus den beiden Richtungen gemittelt. In Abbildung 5.26 ist dieser Zusammenhang dargestellt.

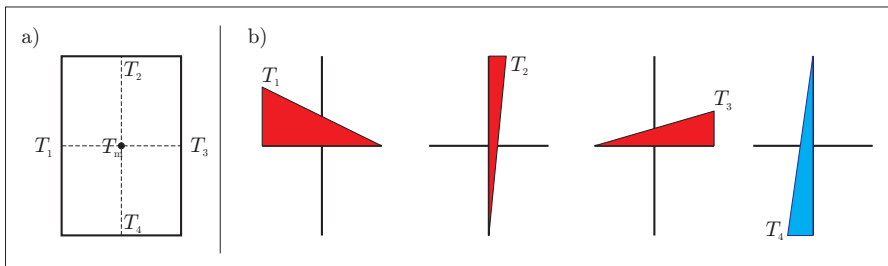


Abb. 5.26. Temperaturverteilung in einem Raum.

Diese Vorgehensweise liefert für die Anwendung in der Statik folgende Strategie: Aus den Werten, zum Beispiel den Auflagerkräften, an den Rändern des Tragwerkes können die Werte im Gebiet, zum Beispiel Schnittkräfte, bestimmt werden. Die

Randwerte, beispielsweise Lagerreaktionen, werden aus der Überlagerung ihrer Einflussfunktion mit der Belastungsfunktion errechnet. Die Überlagerung der Einflussfunktion der Zielgröße im Gebiet mit den Belastungen würde den Wert der Zielgröße ebenfalls liefern. Rechentechnisch ist dies jedoch nicht so einfach, weil die Einflussfunktion für jeden Punkt neu bestimmt werden müsste. Aus diesem Grund wird ein Umweg gegangen. Die verwendeten Einflussfunktionen erstrecken sich bis ins Unendliche und nicht nur bis zum Tragwerksrand; sie werden Grundlösungen genannt. An den Gebietsrändern werden die Funktionen abgeschnitten und um die Randwerte ergänzt. Deshalb müssen die Randwerte zur Anpassung der Grundlösung an das System bestimmt werden. Es kann so immer mit der gleichen Einflussfunktion für die Zielgröße gerechnet werden.

Die Methode der FEM hingegen definiert die Einflussfunktionen nur für begrenzte Tragwerksbereiche. Die Einflussfunktionen werden genutzt, um die Steifigkeiten der einzelnen Elemente zu bestimmen und die Lasten auf die Knotenpunkte zu verteilen. In beiden Fällen wird das System in eine Feder mit diversen Freiheitsgraden überführt.

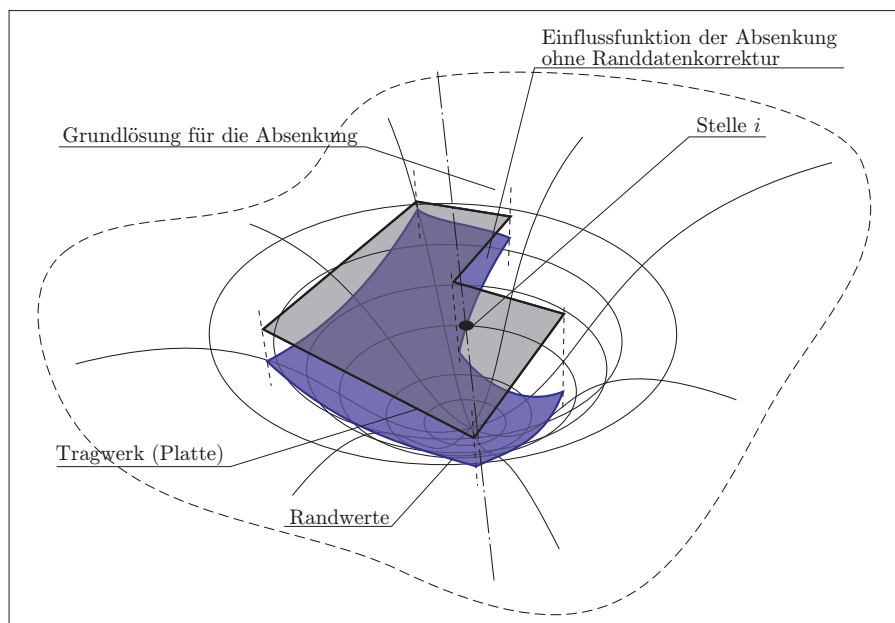


Abb. 5.27. Schematische Darstellung der Grundlösung der Absenkung unter dem Punkt i sowie die sich ergebenden Randwerte für die dargestellte Platte.

Der Vorteil ist nun, dass nicht das gesamte Gebiet diskretisiert werden muss, sondern lediglich der Rand. Bekannt sein müssen jetzt nur noch die Einflussfunktionen. Dies ist jedoch dann nicht mehr trivial, wenn eine Einflussfunktion für das gesamte Tragwerk generiert werden soll. Die REM arbeitet mit globalen Einflussfunktionen,

den Grundlösungen. In Abbildung 5.27 sind Tragwerk, Grundlösung und Randwerte skizzenhaft dargestellt.

Mathematischer Hintergrund der REM ist die Möglichkeit, die Integrationsgebiete durch Anwendung der Integralsätze von Gauß, Green und Stokes um eine Dimension zu verringern. Besitzen Funktionen bestimmte Eigenschaften – und die Grundlösungen besitzen diese – so kann ein Raumintegral in ein Flächenintegral oder ein Flächenintegral in ein Randintegral umgewandelt werden. Die Grundlösungen sind allerdings so beschaffen, dass eine mehrfache Umwandlung (Schritt 1: Raum zu Fläche, Schritt 2: Fläche zu Linie) nicht funktioniert. Da sich hier aber ein ganz weites Feld (Funktionen mehrerer Veränderlicher) auftut, und wir uns im Wesentlichen mit den eher einfachen Prinzipien beschäftigen wollen, belassen wir es bei diesem Hinweis und empfehlen Interessierten den Rückgriff auf entsprechende mathematische Fachliteratur wie z.B. [21].

5.6.3 Herleitung für den Stab

Koppelbedingung

Für die Anwendung der REM muss ein Gebiet – die Struktur – diskretisiert werden. Dazu sind die Randbedingungen und ihre Zusammenhänge zu definieren. Dies geschieht über Koppelbedingungen. Die einfachste hiervon ist die für den Normalkraftstab.

$$\underbrace{\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_K \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}}_u = \underbrace{\begin{bmatrix} f_a \\ f_b \end{bmatrix}}_f + \underbrace{\begin{bmatrix} p_a \\ p_b \end{bmatrix}}_p.$$

Hierbei wird der Stab mit Anfangspunkt a und Endpunkt b versehen. Die Positivdefinition der Kräfte entspricht nicht dem Schnittprinzip, sondern folgt der x -Achse (positives x nach rechts, positives z nach unten), wobei mit f die inneren und p die äußeren Kräfte¹⁰ beschrieben werden. Für ein nicht verschiebliches System kann die Kopplung stets bestimmt werden, so dass die Randbedingungen an jedem Element in Form von Weg- oder Kraftgrößen vorliegen.

Aus der Koppelbedingung lässt sich auch die Übertragungsfunktion ableiten. Diese überträgt die Kraft- und Weggrößen von einem Rand des Elementes unter Berücksichtigung der Last auf den zweiten Rand. Mit $k = (EA)/l$ folgt aus der Koppelbedingung:

$$\begin{aligned} k u_a - k u_b &= f_a + p_a \\ \Rightarrow k u_a - f_a &= k u_b + p_a \\ \Rightarrow u_a - \frac{f_a}{k} &= u_b + \frac{p_a}{k} = u_b + \hat{p}_a. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Daraus lässt sich weiter ableiten:

$$k u_b = k u_a - f_a - p_a.$$

Für die zweite Zeile gilt dann:

¹⁰ negative Festhaltekraft resultierend aus Einwirkungen

$$\begin{aligned}
& -ku_a + ku_b = f_b + p_b \\
\Rightarrow & -ku_a + ku_a - f_a - p_a = f_b + p_b \\
\Rightarrow & -f_a = f_b + p_b + p_a = f_2 + \hat{p}_b.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Nun lässt sich die Übertragungsmatrix $\mathbf{T}$ bestimmen:

$$\mathbf{T} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ f_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/k \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ f_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_b \\ f_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{p}_a \\ \hat{p}_b \end{bmatrix}$$

mit $k = EA/l$, $\hat{p}_a = p_a/k$ und $\hat{p}_b = p_a + p_b$.

Greensche Funktion und Grundlösung

Für die REM ist die Ermittlung von Einflussfunktionen von zentraler Bedeutung. Es soll nun gezeigt werden, wie für den Stab die Greensche Funktion $G(y, x)$ für die Normalenverschiebung und hieraus die Verschiebungsfunktion $u(y)$ bestimmt wird.

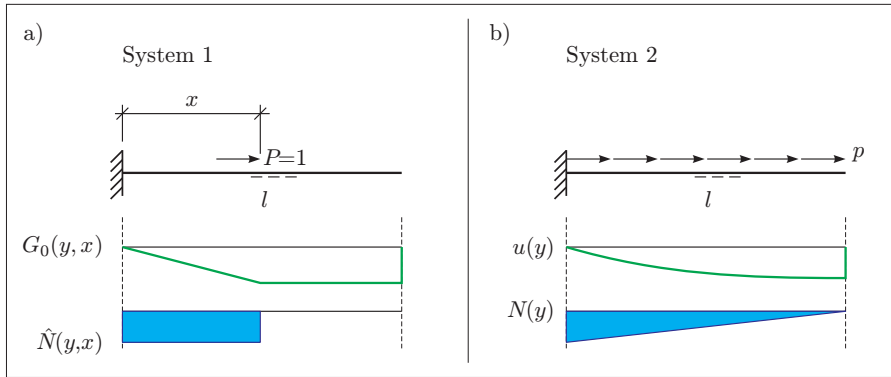


Abb. 5.28. Ermittlung der Greenschen Funktion für ein System unter Einzellast P und Streckenlast q .

Der Satz von Betti lautet für den Normalkraftstab (siehe Abbildung 5.28)

$$B(\hat{u}, u) = \int_0^l (-EA\hat{u}'') u \, dx + [\hat{N}u - \hat{u}N]_0^l - \int_0^l \hat{u}(-EAu'') \, dx = 0.$$

Der Stab wird in zwei Intervalle unterteilt, von 0 bis x und von x bis l . Der Sprung der Normalkraft wird über die Nebenbedingung $N(x^L) = N(x^R) + P$ berücksichtigt. Der Satz von Betti lautet nun

$$\begin{aligned}
B(\hat{u}, u) &= \int_0^x (-EA\hat{u}'') u \, dy + [\hat{N}u - \hat{u}N]_0^x - \int_0^x \hat{u}(-EAu'') \, dy \\
&+ \int_x^l (-EA\hat{u}'') u \, dy + [\hat{N}u - \hat{u}N]_x^l - \int_x^l \hat{u}(-EAu'') \, dy = 0.
\end{aligned}$$

Mit den Nebenbedingungen $u(0) = 0$, $N(l) = 0$, etc. und Einsetzten der Greenschen Funktion $\hat{u} = G(y, x)$ folgt nun:

$$\begin{aligned}
 B(G, u) &= \int_0^x 0 \cdot u \, dy + \hat{N}(x^L) u(x^L) - \hat{N}(0) u(0) - G(x^L, x) N(x^L) \\
 &\quad + G(0, x) N(0) - \int_0^x G(y, x) p \, dy + \int_x^l 0 \cdot u \, dy + \hat{N}(l) u(l) \\
 &\quad - \hat{N}(x^R) u(x^R) - G(l, x) N(l) + G(x^R, x) N(x^R) - \int_x^l G(y, x) p \, dy = 0, \\
 B(G, u) &= \hat{N}(x^L) u(x^L) - \hat{N}(0) \cdot 0 - G(x^L, x) N(x^L) + 0 \cdot N(0) \\
 &\quad - \int_0^x G(y, x) p \, dy + 0 \cdot u(l) - \hat{N}(x^R) u(x^R) \\
 &\quad - G(l, x) \cdot 0 + G(x^R, x) N(x^R) - \int_x^l G(y, x) p \, dy = 0.
 \end{aligned}$$

Ordnet man die einzelnen Ausdrücke und fasst zusammen, so erhält man zunächst

$$\begin{aligned}
 B(G, u) &= \hat{N}(x^L) u(x^L) - \hat{N}(x^R) u(x^R) \\
 &\quad - G(x^L, x) N(x^L) + G(x^R, x) N(x^R) - \int_0^l G(y, x) p \, dy = 0.
 \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der zweiten Zeile vor dem Integralausdruck wird zu Null, da an der Stelle x sowohl der Normalkraftverlauf des Systems u als auch die Greensche Funktion keinen Sprung haben. Die erste Zeile kann unter Berücksichtigung des Normalkraftsprunges um 1, $\hat{N}(x^L) - \hat{N}(x^R) = 1$, in der Greenschen Funktion umgeformt werden und man erhält

$$B(G, u) = \underbrace{\{\hat{N}(x^L) - \hat{N}(x^R)\}}_{=1} u(x) - \int_0^l G(y, x) p \, dy = 0.$$

Daraus folgt nun auf einfache Weise

$$u(x) = \int_0^l G(y, x) p \, dy.$$

Die Verschiebung u an der Stelle x ergibt sich aus der Überlagerung der Belastung $p(y)$ mit der Funktion $G(y, x)$, die im Folgenden als Greensche Funktion bezeichnet wird. Die Greensche Funktion für die Verschiebung unter 1-Last ist gesplittet und lautet:

$$G(y, x) = \frac{1}{EA} \begin{cases} y, & y \leq x \\ x, & x \geq y \end{cases}$$

Damit erhält man für die Verschiebung an der Stelle y

$$u(x) = \int_0^l G(y, x) p \, dy = \int_0^x \frac{y}{EA} p \, dy + \int_x^l \frac{x}{EA} p \, dy = \frac{p}{EA} \left\{ lx - \frac{x^2}{2} \right\}.$$

Dieser Fall ist sehr speziell, weil die Randbedingungen von vornherein vorgegeben worden sind. Bei einer allgemeinen Betrachtung wird nicht die Greensche Funktion G verwendet, sondern deren Grundlösung g_0 . Diese Funktion bezieht sich auf

einen unendlich langen Stab. Sie wird durch die Bestimmung der Randwerte in dem Bereich, in dem der reale Stab existiert, auf das System angepasst. Die allgemeine Lösung für den Stab mit dem Anfangspunkt a und dem Endpunkt b lautet

$$\begin{aligned} u(x) &= -[\hat{N}u - g_0N]_a^b + \int_a^b g_0(y, x) p \, dy \\ &= -\hat{N}(b)u(b) + \hat{N}(a)u(a) + g_0(b, x)N(b) - g_0(a, x)N(a) \\ &\quad + \int_a^x g_0(y, x) p \, dy + \int_x^b g_0(y, x) p \, dy. \end{aligned}$$

Die Grundlösung vom Zug-Druckstab lautet

$$g_0(y, x) = \frac{1}{EA} \begin{cases} (1-x)y, & y \leq x, \\ (1-y)x, & y \geq x \end{cases}$$

und – daraus bestimmt – der Verlauf der Normalkraft der Grundlösung:

$$\hat{N}(y, x) = \begin{cases} 1-x, & y \leq x, \\ -x, & y \geq x. \end{cases}$$

Diese Funktionen werden nun in obige Gleichung für $u(x)$ eingesetzt:

$$\begin{aligned} u(x) &= x u(b) + (1-x) u(a) + \frac{(1-b)x}{EA} N(b) - \frac{(1-x)a}{EA} N(a) \\ &\quad + \frac{1-x}{EA} \int_a^x y p \, dy + \frac{x}{EA} \int_x^b (1-y) p \, dy. \end{aligned}$$

Nimmt man nun an, dass die Belastungsfunktion p eine konstante Funktion ist, so lassen sich die Integralausdrücke bestimmen zu

$$\begin{aligned} u(x) &= x u(b) + (1-x) u(a) + \frac{(1-b)x}{EA} N(b) - \frac{(1-x)a}{EA} N(a) \\ &\quad + \frac{p(1-x)}{EA} \left[\frac{y^2}{2} \right]_a^x + \frac{px}{EA} \left[y - \frac{y^2}{2} \right]_x^b. \end{aligned}$$

Die Grenzen eingesetzt und zusammengefasst erhält man als eine allgemeine Lösung von $u(x)$ für konstante Lasten p :

$$\begin{aligned} u(x) &= x u(b) + (1-x) u(a) + \frac{(1-b)x}{EA} N(b) - \frac{(1-x)a}{EA} N(a) \\ &\quad + \frac{p}{2EA} \{a^2(x-1) - x(b^2 - 2b + x)\}. \end{aligned}$$

Als letztes soll diese allgemeine Lösung anhand der schon berechneten Lösung für das konkrete Beispiel überprüft werden. Es wird angenommen: $a = 0$, $b = l$ und die bekannten Randbedingungen links gehalten, rechts frei verschieblich.

$$\begin{aligned} u(x) &= x u(l) + 0 + 0 - 0 - \frac{p}{2EA} \{x(b^2 - 2b + x)\}, \\ u(x) &= x u(l) - \frac{pxl^2}{2EA} + \frac{p}{EA} \left\{ lx - \frac{x^2}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Der gewonnene Ausdruck stimmt erst dann mit der vorher bestimmten Lösung überein, wenn die ersten beiden Terme verschwinden. Diese Ausdrücke werden näher betrachtet:

$$x u(l) - \frac{p x l^2}{2 E A} = 0 \quad \Rightarrow \quad u(l) = \frac{p l^2}{2 E A}.$$

Demnach wurde mit dieser Methode gleichzeitig die Verformung am rechten Rand des Systems bestimmt. Löst man die Differentialgleichung, so erhält man genau diesen Ausdruck für die Verformung am rechten Gleitlager! Somit ist die geforderte Bedingung berechtigt, und der allgemeine Ausdruck konnte in den speziellen überführt werden.

Die Herleitung der Greenschen Funktionen und der Grundlösungen für den Balken erfolgt entsprechend. Aufgrund der Komplexität wird sie hier jedoch nicht durchgeführt.

Zum Merken:

Eine Greensche Funktion ist eine Einflussfunktion für eine Zielgröße. Wird sie mit der Belastungsfunktion überlagert, so ergibt sich die Beschreibung der Zielfunktion. Eine Greensche Funktion, die sich auf ein unbegrenzt langes Element bezieht, wird Grundlösung oder Fundamentallösung genannt und muss mittels Randwertbestimmung an das System angepasst werden.

5.6.4 Operatoren

Das Kraftgrößenverfahren verwendet den *Differentialoperator* zur Definition der Verformungsfunktionen.

Bei der Platte wird der Laplace-Operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \cdot \partial x_2}$$

verwendet. Die Differentialgleichung der (Kirchhoff-)Platte ergibt sich mit der Plattensteifigkeit K zu

$$K \Delta \Delta w(x_1, x_2) = p(x_1, x_2).$$

Für den Balken ist die Differentialgleichung entsprechend nur für eine Spannrichtung definiert und lautet bekanntermaßen

$$EI \Delta \Delta w(x_1, x_2) = EI \frac{d^4}{dx^4} w(x) = EI w^{IV}(x) = p(x).$$

Die REM hingegen verwendet zur Bestimmung der Verformungsfunktion einen *Integraloperator*, die Greensche Funktion bzw. Einflussfunktion:

$$w(x) = \int_l \underbrace{G(y, x)}_{\text{Kern}} \cdot p(y) dy.$$

Der Vorteil besteht darin, dass die Integration einer Näherungsfunktion numerisch günstiger ist, als die mehrfache Differentiation einer genäherten Funktion. Die Greensche Funktion stellt den Kern des Integraloperators dar. Um die verschiedenen Zielgrößen zu erhalten, müssen hier nur die entsprechenden Kerne eingesetzt werden. Eine vollständige Lösung der Differentialgleichung, wie sie beim Verwenden eines Differentialoperators notwendig ist, entfällt somit [15].

5.6.5 Anwendung

Grundlösungen für den Balken

Die Grundlösungen für den Balken sind in Abbildung 5.29 dargestellt. Bei den analytischen Lösungen sind w und w' grau dargestellt, die Schnittkräfte entsprechend ihren Vorzeichen.

Zusätzlich sind auch die Verformungen und Schnittkraftverläufe einer Berechnung mit finiten Elementen gestrichelt skizziert. Zugrunde liegt die Annahme, dass der Punkt, für den die Einflussfunktion bestimmt wird, nicht ein Rasterpunkt des FE-Netzes ist. Vor allem die Darstellung von Knicken (beim Biegemoment) und Versätzen (bei der Querkraft) gelingt hiermit nicht sehr exakt. Dieser Effekt entsteht dadurch, dass bei der Berechnung der Zielgrößen im Feld zur Darstellung lediglich Polynome zur Verfügung stehen, die Biegelinie beispielsweise als Polynom 3. Grades. Aus diesem Grund können FE-Programme besser Verformungen als Kraftgrößen berechnen. Siehe hierzu auch [12].

Die FE-Ergebnisse können durch eine Nachlaufrechnung verbessert werden, zum Beispiel durch Anwendung des Kraftgrößenverfahrens unter Verwendung der Randwerte aus der FE Berechnung. Für Einflussfunktionen, die sich auf Rasterpunkte beziehen, sind die FEM-Ergebnisse und Sollverläufe vergleichsweise ähnlich. Bei flächigen Elementen (Platte, Schale) sind die Abweichungen der Einflussflächen aus dem FE-Modell entsprechend noch deutlicher gegenüber den analytischen Vorgaben, weil die Verformungen in der zweiten Spannrichtung theoretisch Null sein sollen, diese Forderung mit den verwendeten Ansatzfunktionen jedoch gar nicht darstellbar ist. Für detaillierte Informationen kann [16] herangezogen werden.

Für die Bestimmung der Greenschen Funktion sind die Grenzen a und b festzulegen und die daraus resultierenden Randwerte zu bestimmen.

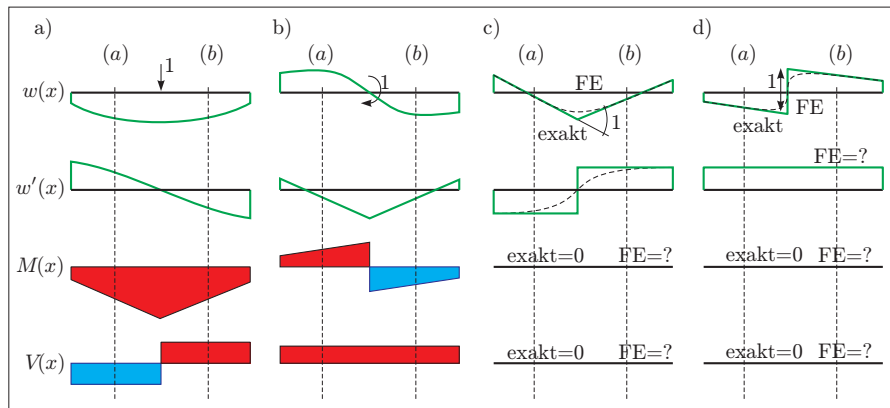


Abb. 5.29. Grundlösungen für den Balken: a) Absenkung, b) Verdrehung, c) Biegemoment und d) Querkraft.

Praxis

In der Praxis werden häufig Randelemente eingesetzt, wenn die Berechnung von Halbräumen erfolgen soll. Im Gegensatz zur FEM, die auf eine vollständige Diskretisierung des betrachteten Gebietes angewiesen ist, reicht der REM ein elementierter Rand des Gebietes aus. Für die Geotechnik bedeutet dies, dass nur die Bodenoberfläche beschrieben werden muss, nicht aber die Bodentiefe.

So wird bei [13] sehr detailliert der Einsatz der REM im Bereich der Geotechnik dargestellt. Dabei werden sowohl statische als auch dynamische Probleme behandelt. Eine weitere Anwendung findet sich beispielsweise bei [3].

Software

Das von F. Hartmann entwickelte Programm zur Berechnung von Tragwerken mittels REM kann als Demoversion unter <http://www.be-statik.de/> herunter geladen werden.

5.7 Fragerunde

1. Warum ist das Prinzip der virtuellen Verrückungen modern?
2. Wie kommt man auf das Minimum der potentiellen Energie?
3. Was unterscheidet eine Einflussfunktion von einer Greenschen Funktion?
4. Wozu sind Polpläne nützlich? Wofür werden sie verwendet?
5. Wie unterscheiden sich Matrizenverschiebungsmethode/FEM und REM?
6. Wozu kann man die Greenschen Identitäten verwenden?
7. Was ist die Mohr'sche Analogie?

EDV-Einsatz

6.1 Rechnen und rechnen lassen

Die EDV hält Einzug in die Lehre nicht nur in Form von Powerpoint Präsentationen, sondern auch verstärkt in Form von Vorlesungen zu Simulation und numerischer Modellierung. Auch unser Eindruck aus mehreren Jahren Tätigkeit im Lehrbetrieb im Fachgebiet Baustatik ist, dass Studierende mit Rechenprogrammen vertraut gemacht werden sollten.

Eine zweigleisige Ausbildung, basierend auf Handrechnung und Computeranwendungen, bietet Vorteile. Einerseits werden den Studierenden mit den Computerprogrammen Werkzeuge gegeben, mit denen sie ihre Handrechnungen schnell und einfach überprüfen können¹. Andererseits verlangt die Ausübung des Ingenieurberufes heute die Anwendung von Berechnungsprogrammen, und folglich wäre eine Einführung auf diese Anwendungen im Studium wünschenswert. Die verstärkte Einbindung von Rechenprogrammen in die Lehre ist nicht nur unsere Meinung oder gar eine ganz neue Erkenntnis, vielmehr ist es eine Forderung, die auch andere Autoren wie z.B. [28] an den Lehrbetrieb stellen.

Durch eine geeignete Auswahl und Vorstellung von Programmen durch den Lehrkörper können die Studierenden auf richtige Wege gebracht werden. Das Erlernen der Bedienung von Rechenprogrammen würde die Studierenden zu mehr Mitarbeit motivieren, wird ihnen doch etwas Praktisches für ihren späteren Beruf beigebracht. Welche Programme sind denn die Richtigen? Besonders interessant erscheinen uns Programme, die einerseits professionellen Ansprüchen genügen und andererseits als Freeware oder Demoversion verfügbar sind. Damit scheidet die Fraktion der reinen Lehrprogramme aus. Diese Fraktion bietet unserer Erfahrung nach weder eine große Modellierungsvielfalt noch gewährt sie einen tiefen Einblick in den mathematischen Rechenablauf.

¹ Umgekehrt ist es natürlich auch möglich, die Ergebnisse von Computerprogrammen mit einer Handrechnung zu überprüfen!

6.2 Programme

6.2.1 RSTAB und RFEM

Das Programm RSTAB war schon zu Beginn unseres Studiums im Lehrbetrieb des FG Baustatik der Universität Kassel fest verankert. Das Programm kann als Demo-version beim Hersteller Dlubal Software bezogen werden. Die Benutzeroberfläche ist in Abbildung 6.1 dargestellt.

Dieses kommerzielle Programm dient der Berechnung ebener und räumlicher Stabwerksprobleme nach Theorie 1. und 2. Ordnung. Die Benutzeroberfläche ist übersichtlich und klar strukturiert. Die Systemeingabe erfolgt tabellarisch und/ oder in graphischer Form, angefangen bei den Knotenkoordinaten, über Werkstoffe bis zu den Geometriedaten. Es werden für alle Parameter Karteikarten angelegt. Das Programm kann Lastfälle und Lastfallkombinationen berechnen, was Betrachtungen gemäß dem aktuellen Sicherheitskonzept erleichtert. Das Programm kann auch zur dynamischen Analyse und zur Bemessung von Tragwerken verwendet werden. Aufgrund des Leistungsumfangs des Programms bedarf es einer längeren Einarbeitungszeit.

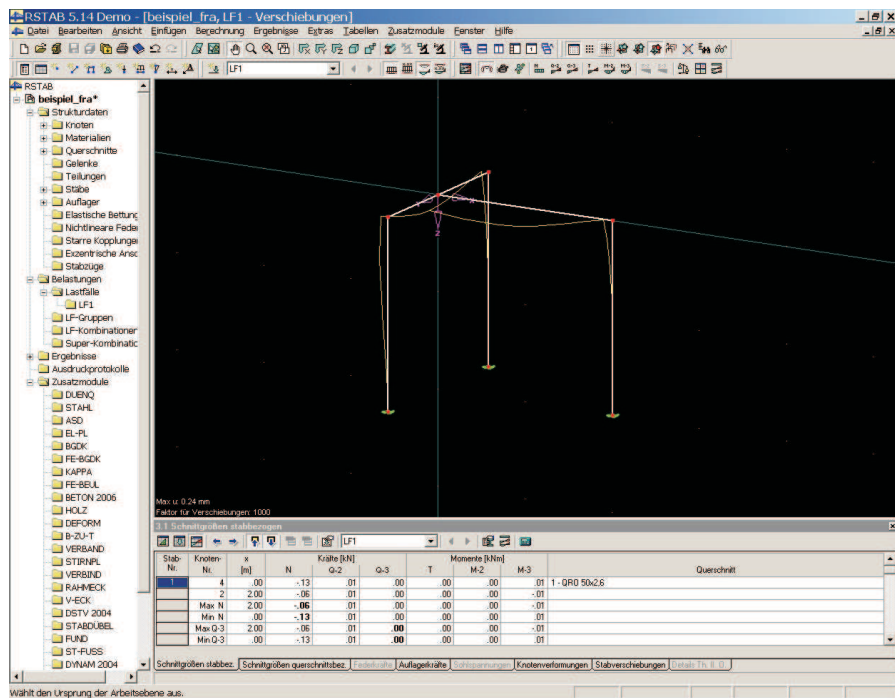


Abb. 6.1. Oberfläche des Programms RSTAB

Während das Programm RSTAB auf Stabtragwerke beschränkt ist, bietet das Programm RFEM die Möglichkeit, auch Flächentragwerke numerisch zu behandeln.

Die Funktionen entsprechen im Wesentlichen denen von RSTAB mit den entsprechenden Erweiterungen für Flächentragwerke.

Nachteilig ist, dass die Eingaben in der Demoversion nicht gespeichert werden können, was die Verwendbarkeit der Demoversion im Lehrbetrieb etwas einschränkt.

Allgemeine Funktionsweise des Programms

Um das Verständnis für das Stabtragwerksprogramm zu erhöhen und den Einstieg zu erleichtern, soll im Folgenden kurz die Vorgehensweise bei der Eingabe erläutert werden. Nach dem Anlegen einer neuen Position müssen in dem Dialogfenster grundlegende Angaben, wie z.B. 2-D (eben) oder 3-D (räumlich) und Einheiten (m und kN), gemacht werden. Anschließend kann sofort mit der Systemeingabe begonnen werden. Dem Programm müssen zunächst die Geometriedaten in Form von Koordinaten für die Knotenpunkte eingegeben werden. Dies kann sowohl über eine Eingabetabelle als auch über die graphische Benutzeroberfläche erfolgen.

Die Knotenpunkte werden dann durch Stäbe verbunden. Bei der tabellarischen Eingabe sind vorher Daten für das Material und den Querschnitt einzugeben. Sollten diese Eingaben fehlen, werden sie bei der graphischen Eingabe mit einer Fehlermeldung nachgefordert. Bei der Eingabe der Stäbe können unterschiedliche Stabtypen, wie z.B. Balken, Fachwerkstab, Zugstab oder Seil, ausgewählt werden. Die Stäbe sind zunächst einmal grundsätzlich fest miteinander verbunden. Es ist möglich, die Stäbe anschließend gelenkig miteinander zu verbinden. Dabei stehen alle drei Gelenkarten zur Verfügung. Federn (Rotations- und Translationsfedern) werden durch Eintrag der Federkennwerte eingegeben. Als letzter Teil der Eingabe des Systems muss noch die Lagerung des Tragwerkes definiert werden.

Die Eingabe der Lasten und Lastfälle erfolgt im Anschluss an die Systemeingabe, und auch hier stehen wieder die zwei Eingabeformen – tabellarisch oder graphisch – zur Verfügung.

- Kontakt: www.dlubal.de
- Systemvoraussetzungen: Windows
- Sprache: Deutsch

6.2.2 TwoDFrame

Das Programm TwoDFrame wurde in den letzten Jahren in den Lehrbetrieb des FG Baustatik der Universität Kassel integriert. Vor allem seine übersichtliche und sehr intuitive Bedienung haben es für den Lehrbetrieb interessant gemacht. Hinzu kommt, dass das Programm die Gleichung $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$ mit den Einträgen in den Vektoren und in der Steifigkeitsmatrix ausgeben kann. Das Programm kann (als Vollversion für den Lehrbetrieb kostenlos!) bei Fa. Ralf Martin Hansen bezogen werden. In Abbildung 6.2 ist die Oberfläche des Programms zu sehen.

Das Programm TwoDFrame dient der Berechnung von Rahmen und Durchlaufträgern unter verschiedenen Lastfällen und ist im Wesentlichen für die Ingenieurpraxis entwickelt worden. Das Programm erlaubt Berechnungen nach Theorie 1. und 2. Ordnung. Die Eingabe von Geometrien und Belastungen erfolgt in graphischer Form und über die Tastatur, wobei beispielsweise Koordinaten durch anklicken im Zeichenfeld vorläufig eingegeben und später dann im Eigenschaftsfeld der Koordinaten noch numerisch verändert werden können. Die Tragwerkselemente werden mit

Informationen aus Werkstoff- und Querschnittsdatenbanken verknüpft. Insgesamt können Tragwerke sehr flott eingegeben werden. Die Bedienung erfordert eine kurze Einarbeitungszeit und ist somit auch für Neulinge im Bereich der Modellierung schnell anzuwenden.

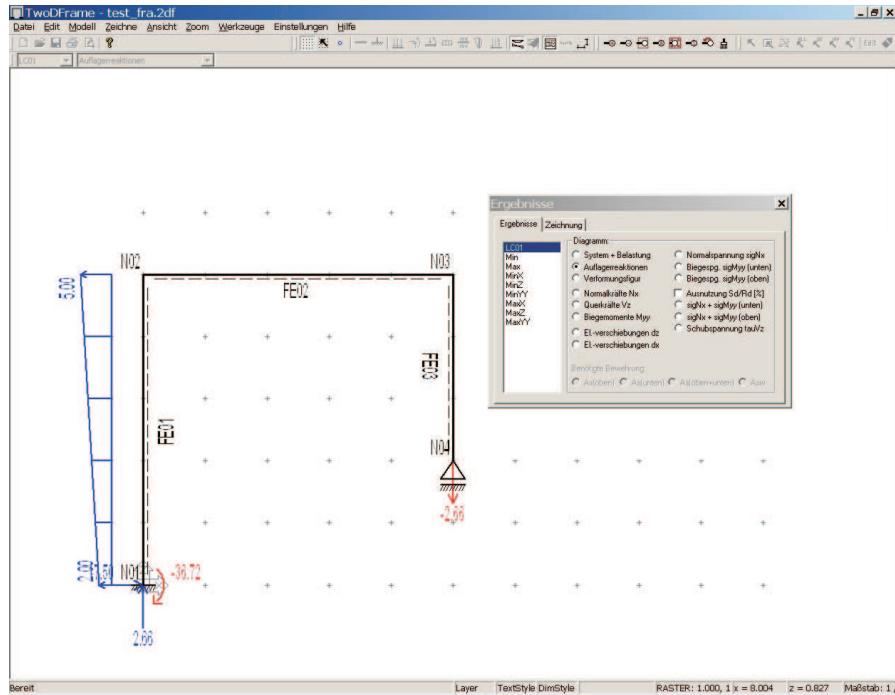


Abb. 6.2. Programm TwoDFrame

Aus didaktischer Sicht ist hervorzuheben, dass die Berechnungen protokolliert werden können und die Rechengänge somit transparent sind. Es können beispielsweise, wie schon erwähnt, die Einträge der Steifigkeitsmatrizen eingesehen und mit den vom Studierenden selbst berechneten Werten verglichen werden. Das Gleiche gilt auch für den Lastvektor. Ein weiterer Vorteil für die Lehre ist die Möglichkeit, Einflussfunktionen zu erzeugen. Die Biegelinie wird vom Programm angezeigt.

Ausgehend vom Programm TwoDFrame gibt es auch ein entsprechendes Raumtragwerksprogramm (ThreeDFrame) und ein Programm zur Berechnung von bewehrten Betonplatten (ThreeDSlab). Diese beiden Programme verfügen über die gleiche Benutzeroberfläche wie TwoDFrame, mit den entsprechenden Modifikationen für Raumtragwerke bzw. Flächentragwerke. Der Umstieg von TwoDFrame auf die anderen beiden Programme ist damit sehr einfach.

Das Programm TwoDFrame ist aufgrund seiner Transparenz für die Lehre und aufgrund der Leistungsfähigkeit für die praktische Anwendung gleichermaßen interessant.

Das Programm ist als Demoversion bislang nicht gedonglt, was die Verwendung z.B. auf Notebooks vereinfacht.

Allgemeine Funktionsweise des Programms

Auch für das Programm TwoDFrame soll die Systemeingabe in allgemeiner Form erläutert werden, da sie ein wenig vom Programm RSTAB abweicht. In TwoDFrame werden die Knoten zusammen mit den Stäben als Stabanfangsknoten und Stabendknoten eingegeben. In dem Dialog *Stabelemente* werden neben den Stabelementen selbst auch die Materialeigenschaften und die Querschnittsdaten eingegeben. Auch hier erfolgt wieder eine Fehlermeldung, wenn diese Informationen dem Programm bei der Staberzeugung noch nicht zur Verfügung stehen. Wie schon erwähnt, kann die Eingabe der Koordinaten entweder über die Tastatur oder mit Hilfe der Maus erfolgen. Die Eingabe von gelenkigen Stabanschlüssen kann in diesem Dialogfenster ebenfalls vorgenommen werden. Allerdings ist ein Anschluss mit Federn nicht möglich.

Im Anschluss an die Geometrieingabe, wird die Lagerung des Systems vorgenommen. Hier stehen dem Benutzer wieder eine gefederte Lagerung zur Verfügung. Erst wenn die Eingabe komplett abgeschlossen ist, können die Lasten eingegeben werden. Wie schon erwähnt, kann das Programm Einflussfunktionen berechnen. Die Eingabe hierfür wird über den Dialog *Einzellasten* vorgenommen. Hier können neben den Einflussfunktionen für Weggrößen auch Einflussfunktionen für die Kraftgrößen erzeugt werden.

- Download: www.ralfmartinhansen.de/
- Systemvoraussetzungen: Windows
- Sprache: Deutsch

6.2.3 Nastran

Eines der mächtigsten FEM-Programme ist Nastran. Es beherrscht statische und dynamische Berechnungen für Stab-, Flächen- und Volumentragwerke. Nastran steht für **N**asa **S**tructural **A**nalysis **S**ystem. Der Nastran-Code wird gegenwärtig von verschiedenen Herstellern in Lizenz weiterentwickelt.

Nastran selbst stellt nur den Rechenkern dar. Es ist durch einen Pre- und einen Postprozessor zu ergänzen. Aufgrund der Lizenzkosten sind diese Softwareprodukte größeren Instituten, Rechenzentren und der Konzernforschung vorbehalten. Nach Möglichkeit sollte den Studierenden jedoch in Form von Projekt- und Diplomarbeiten Zugang zu diesen Programmen gewährt werden.

Die Einarbeitung in das Programm ist sehr aufwändig. Dafür sind die Berechnungsabläufe absolut transparent und deshalb Schritt für Schritt nachvollziehbar. Wie schon erwähnt, ist Nastran modular aufgebaut und bedarf eines Pre- und eines Postprozessors. An den Schnittstellen können die übergebenen Daten eingesehen und verändert werden. Dem Einsatz von eigenen Pre- und Postprozessoren steht also nichts im Wege.

Unter den hier aufgeführten FEM-Systemen ist Nastran sicherlich das am aufwändigsten zu erlernende Programm, aber die inhaltlichen Erkenntnisse über die Funktionsweise von FEM-Systemen sind dann auch am größten. Für Einsteiger in das Thema numerische Modellierung ist Nastran aber eher ungeeignet.

- Hersteller: MSC.Software (MD.Nastran/Patran), UGS Unigraphics Solutions GmbH (NX Nastran/Femap), Schaeffer Automated Simulation zusammen mit Ansys (AI*Nastran) und Noran Engineering (NEi Nastran).
- Systemvoraussetzungen: Windows, Unix
- Sprache: Englisch

Autoren

Dipl.-Ing. Wolfram Franke VDI (Wolfram-Franke@web.de)

- Geboren: 14.12.1977 in Hannover
- Studium: Bauingenieurwesen, Universität Kassel, 1998 bis 2004
- Abschlüsse: Diplom 1 in der Vertiefungsrichtung Wasserwesen, Diplom 2 in der Vertiefungsrichtung Konstruktions- und Fertigungstechnik.
- Tätigkeiten: Wissenschaftlicher Angestellter am Fachgebiet Siedlungswasserwirtschaft der Universität Kassel seit 2004 mit den Forschungsschwerpunkten *gasförmige Emissionen aus Abwassersystemen* und *Abluftbehandlungsanlagen*, sowie Öffentlichkeitsarbeit. Während des Studiums als studentische Hilfskraft in den Fachgebieten Stahlbau, Baustatik und Siedlungswasserwirtschaft an der Universität Kassel beschäftigt.

Dipl.-Ing. Thorsten Kunow VDI (ThorstenKunow@web.de)

- Geboren: 16.08.1974 in Kiel
- Studium: Bauingenieurwesen, Universität Kassel, 1998 bis 2003
- Abschlüsse: Diplom 1 und 2 mit Vertiefungsrichtung Konstruktions- und Fertigungstechnik
- Handwerkliche Ausbildung: Tischler, Muhlack, Kiel, 1994 bis 1998
- Tätigkeiten: Wissenschaftlicher Angestellter am Fachgebiet Baustatik der Universität Kassel seit 2003 mit den Forschungsschwerpunkten *Mathematische Grundlagen der Methode der finiten Elemente*, *Zielorientierte a posteriori Fehlerschätzung und Adaptionstechniken*, *Anwendung der Methode der finiten Elemente auf Ingenieurprobleme*. Während des Studiums als studentische Hilfskraft in den Fachgebieten Baustoffkunde und Baustatik an der Universität Kassel beschäftigt.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Dachkonstruktion einer alten Scheune ausgebildet als Fach- und Ständerwerk.	1
1.2	Expo-Dach auf dem Messegelände Hannover.	2
1.3	Mehretagiges Congress-Centrum auf der Hannovermesse. Stahl- und Betonkonstruktion.	2
1.4	Schrägseilbrücke <i>Vanšu tilts</i> über die Daugawa in Riga/Lettland.	3
1.5	Außenansicht des phäno in Wolfsburg mit seinen geschwungenen Tragfeilern.	3
1.6	a) Seil vorgespannt, aber unbelastet, b) und c) Seil mit einer Einzellast in Systemmitte und d) Seil mit zwei Einzellasten. ...	4
1.7	a) Sichtbare Spannung an einem Balken infolge einer Einzellast, b) Spannung an einem Balken mit Löchern infolge einer Einzellast.	5
1.8	a) Schnittgrößen im allgemeinen Fall und b) am ebenen Balken.	5
1.9	Schnittuferdefinition. a) Balkenabschnitt, b) Schnitt und c) zwei Schnittufer.	6
1.10	a) Balken mit Normal- und Querlast, b) Schnittgrößen am differentiellen Balkenelement.	7
1.11	a) Dehnstab, b) Bernoulli-Balken und c) Spannungsverteilung an der Stelle x	8
1.12	a) Zusammenhang der Schnittgrößen am Einfeldträger und b) am Kragarm.	10
1.13	Ableitung der Schnittgrößen aus der Biegelinie.	11
1.14	Statisch bestimmtes System mit Gleichstreckenlast.	12
1.15	Das System wurde durch Schnitte an Gelenken in fünf Teilsysteme unterteilt. Die frei werdenden Schnittkräfte sind angetragen.	13
1.16	Die Ergebnisse für die Berechnung der Schnittkräfte an der Explosionszeichnung.	14

1.17	a) 3-wertiges Auflager, b) 2-wertiges Auflager in zwei Varianten, c) 1-wertiges Auflager und d) freies Stabende.	15
1.18	Die drei theoretisch möglichen Gelenkart in einem statischen System, Momenten-, Querkraft und Normalkraftgelenk. Die Konstruktion für solche Gelenke ist in der Mitte dargestellt. Rechts sind die auftretenden Schnittkräfte abgebildet.	16
1.19	Die unterschiedlichen Dachformen.	21
1.20	Einteilung eines Satteldaches in die nach der DIN vorgegebenen Bereiche. a) Windanströmrichtung $\theta = 0^\circ$ und b) Windanströmrichtung $\theta = 90^\circ$	22
1.21	a) Skizze der Schneelastzonenkarte und b) Charakteristische Werte der Schneelast s_k im Diagramm	23
1.22	Schneelastverteilung auf einem Scheddach nach DIN 1055-5. ...	24
1.23	Beispiel zu Lastannahmen: a) System und b) Dachgeschoss mit Lasten.	24
1.24	a) Balken auf zwei Stützen und b) Kragarm mit Gleichstreckenlast. Durchlaufträger mit Lasten c) im rechten Feld, d) in den Außenfeldern, e) im Mittelfeld und f) auf dem gesamten Träger.	27
2.1	Darstellung von Lagern und Gelenken in der Statik. Die Parameter a und r werden in die Bestimmungsgleichung für die statische Unbestimmtheit eingesetzt.	30
2.2	a) Rahmen mit Mehrfachgelenken und b) äußerlich statisch bestimmter Rahmen, der innerlich aber statisch unbestimmt ist.	31
2.3	Bestimmung des Grades der statischen Unbestimmtheit bei räumlichen Tragwerken. Sicherer als das Abzählkriterium erscheint hier die Elimination der Pendelstäbe.	32
2.4	a) Statisch bestimmtes System mit äußerer statischer Unbestimmtheit. b) Statisch unbestimmtes System, innerlich statisch unbestimmt, aber statisch bestimmt gelagert.	33
2.5	Die eingeprägte Lagerverschiebung am linken Auflager hat für das statisch bestimmte System keinen Schnittkraftverlauf zur Folge.	33
2.6	Integraltafel für übliche Funktionen.	35
2.7	Beispiel Zweifeldträger: a) System, b) Hauptsystem, c) Lastspannungszustand, d) Hilfszustand und e) Endzustand der Momentenfläche.	35
2.8	Beispiel zur Arbeitsgleichung. Berechnung der Absenkung am linken Systemende.	37
2.9	Stabwerk mit Feder. a) System, b) Momente im Lastspannungszustand und c) Momente im Hilfszustand.	39
2.10	Beispiel eines Trägers mit veränderlicher Streckenlast. a) System und b) qualitative Schnittgrößenverläufe.	41

2.11 a) Stab unter Temperaturlast, b) Hilfssystem und c) Lastspannungszustand.	43
2.12 Einzelpunktverformungen: a) Vertikale Absenkung, b) Verdrehung des linken Gelenkanschlusses, c) Verdrehung des rechten Gelenkanschlusses und d) Relativverdrehung am Gelenk.	45
2.13 Vollständige Einzelpunktverformungen setzen sich (in der Ebene) aus beiden Verformungskomponenten zusammen. a) System, b) Momente aus Last, c) Momente aus vertikaler 1-Kraft und d) Momente aus horizontaler 1-Kraft.	47
2.14 Lagerabsenkungen. a) System mit Belastung und b) Hilfszustand.	48
2.15 Verformung als Belastung aufbringen. a) System, b) Momente aus 1-Last und c) skaliertes System.	49
2.16 a) Zwei Funktionen und Vektorisierung und b) Skalarprodukt von Vektoren.	50
2.17 Beispiel zur Orthogonalität von Lastzuständen: a) System, b) Lastzustand, c) Hilfszustand und d) Additive Überlagerung. ...	51
2.18 Räumlicher Kragarm, a) Biegemomente und b) Torsion.	54
2.19 Bestimmung der Lagerreaktionen bei einem Raumtragwerk. System mit Ansichten.	55
2.20 Schnittgrößen bei einem räumlichen Tragwerk. a) System, b) Schnittgrößen und Lager und c) Hilfsansichten.	57
3.1 Das Federgesetz als Grundlage der Matrizenverschiebungsmethode. a) Feder mit einem Freiheitsgrad und b) mit zwei Freiheitsgraden.	60
3.2 a) Statische System mit Auflagern und angreifenden Kräften. b) Zwei am System mögliche Starrkörperbewegungen, links eine Translationsbewegung, rechts eine Rotationsbewegung.	61
3.3 System mit zwei Stabelementen. Lokale und globale Freiheitsgrade.	63
3.4 a) Translationsfeder als Element und b) Rotationsfeder als Element.	64
3.5 Aus den Belastungen folgen Lagerdrücke. Deren Wirkungsrichtungen stimmen, bis auf das rechte Einspannmoment, bezogen auf die Vorzeichen mit den Positivrichtungen aus der MVM überein.	66
3.6 Lagerdrücke für elementare Lastfälle.	66
3.7 Beispiel für Belastungen: a) Schräge Last am Knoten, b) Last im Feld, c) Verteilte Last und d) Gedrehtes Element.	67
3.8 Lagerdrücke für spezielle Lastfälle wie Temperatur und Lagerverschiebungen.	69
3.9 Es werden die Einträge der Matrix mit negativen Vorzeichen auf die linke Seite gebracht, die mit 5 multipliziert werden.	69

3.10	Freiheitsgrade für a) Zug-Druckstab, b) Balken ohne Normalkraft, c) gedrehten Pendelstab und d) gedrehten Balken mit allen Freiheitsgraden	70
3.11	Beispiel für Belastungen: a) System, b) Element, c) Vorzeichendefinition für Kraftgrößenverfahren und d) Verformung und Schnittgrößen am Element.	76
3.12	Schematischer Ablauf der Berechnung. a) System mit globalen Freiheitsgraden, b) Inzidenztabelle und c) Steifigkeitsmatrizen. .	78
3.13	Der Unterschied zwischen einer Einheitsverformung und einer eingepprägten Einsverformung.	79
3.14	Einheitsverformungen am a) Stab und b) Balken.	81
3.15	Einheitsverformungen an einem Rahmensystem. a) System, b) Einheitsverformung und c) Einsverformung, ist hier nicht gefragt gewesen.	82
3.16	Ersatz eines Systems durch Federn.	83
3.17	Vereinfachtes Weggrößenverfahren: Das Drehwinkelverfahren. a) Element, b) System, c) Aufteilung des Systems und d) Momente aus Belastung am Element.	87
3.18	a) System mit Daten und b) mit dem Drehwinkelverfahren berechneter Momentenverlauf.	88
4.1	a) Symmetrisches System und b) abgeleitetes vereinfachtes System.	92
4.2	a) Reduktion bei Vertikallast, b) symmetrische Einzellast, c) zwei symmetrische Einzellasten, d) zwei antimetrische Lasten. .	93
4.3	a) System mit Lastaufteilung und b) Vereinfachung der statisch unbestimmten Berechnung.	93
4.4	Rahmentragwerk mit Lagerreaktionen.	95
4.5	Bei geschlossenen Rahmen bleiben die Kräfte im Tragwerk, es treten keine Lagerreaktionen auf. a) System, b) statisch Überzählige und c) zugehörige Lagerreaktionen und Momentenflächen.	97
4.6	Passproblem: a) System und b) Momente aus Hilfszustand.	98
4.7	Langerscher Balken. a) Statisches System und b) Straßenbrücke Eulenkamp/Hannover.	99
4.8	Langerscher Balken, Gitterträger als Stabbögen. a) Statisches System und b) Straßenbrücke Am Listenhof/Hannover.	100
4.9	Vierendeelträger und Langerscher Balken. a) Statische Systeme und b) Kfz- und Straßenbahnbrücke Podbielskistraße/Hannover.	101
4.10	Ausbildung einer Setzungsmulde. a) Sachverhalt als Schemazeichnung, b) Modell nach Steifezifferverfahren und c) Modell nach Bettungszifferverfahren.	102
4.11	Ableiten der Elemente im Modell des Schubträgers.	103
4.12	a) Schub- und Biegeträger, b) differentielles Element und c) Stockwerksrahmen.	104

4.13	a) Seil mit Schnittgrößen und b) Differentielles Seilelement.	105
4.14	Schnittgrößenermittlung am verformten System. a) System, b) Momente und Lager nach Theorie 1. Ordnung, c) Hilfszustand 1, d) Hilfszustand 2, e) System im verformten Zustand und f) Momente nach Theorie 2. Ordnung	107
4.15	Elastische und plastische Verformung. a) Zugstab unter verschiedenen Belastungen und b) Spannungs-Dehnungs-Beziehung.	108
4.16	Ermittlung der plastischen Grenzlaster für einen Durchlaufträger. a) System, b) Momentenfläche und c) Verschiebungsfigur.	110
4.17	Ermittlung der Kraft-Verformungs-Beziehung für ein Tragwerk. a) System und b) Kraft-Verformungs-Linie.	111
4.18	Systembild mit Verformungsfigur für die Betrachtung eines einfachen Stabilitätsproblems. Die Stäbe werden dabei als unendlich Dehn- und Biegesteif angenommen. Es ist lediglich eine Drehung um das Auflager möglich.	112
4.19	Last-Verformungskurven für unterschiedliche Formulierungen und Parameter für e_0/h_0	113
4.20	Systeme mit Knicklasten und Knickfiguren nach Euler.	115
4.21	Schnittgrößen am Balken und Seil nach Theorie 1. Ordnung und am Balken nach Theorie 2. Ordnung.	116
4.22	Berechnung der kritischen Knicklast für ein Tragwerk mit eingezeichneter Knickfigur.	118
4.23	a) Zerlegtes System mit angetragenen globalen Freiheitsgraden, b) Inzidenztabelle und c) gesamte und reduzierte Steifigkeitsmatrix.	119
5.1	Die Energie steht so lange zur Verfügung, bis sie abgebaut wird.	124
5.2	Die neu aufgebrachten Kräfte leisten immer nur Arbeit auf den alten Wegen.	124
5.3	Anwendung des Prinzips der virtuellen Verrückungen zur Lagerreaktionsbestimmung.	126
5.4	Die stabile Auslenkung macht die potentielle Energie zum Minimum. a) Feder mit Auslenkung und b) Potentielle Energie.	127
5.5	a) Sprungbrett mit Springer, b) Springer=Gewichtskraft an verschiedenen Stellen und Lagerreaktionen, c) Einflusslinie für Lager A und d) Einflusslinie für Lager B.	130
5.6	Einflussfunktionen: a) System mit Wanderlast, b) Wanderlast an verschiedenen Positionen und c) Einflusslinie.	131
5.7	Einflussfunktionen: a) System 1 mit Wanderlast und b) kinematisches System mit Verformungen.	132
5.8	Durchlaufträger mit verschiedenen Einflusslinien. Alle nichtlinearen Verläufe sind hier Funktionen 3. Ordnung.	134

5.9	Greensche Funktionen: a) Stab mit Einflusslinie und b) Greensche Funktion, dargestellt für mehrere Stellen des Stabes.	135
5.10	Modelle von a) einer statisch bestimmten Dreifeldbrücke und b) einer statisch unbestimmten Mehrfeldbrücke.	136
5.11	Einheitsverformungen am a) Stab und b) Balken.	137
5.12	Vorgehensschema zur Ermittlung von Einflusslinien.	138
5.13	Biegebalken mit Einflusslinie für das Moment an der Stelle i .	140
5.14	a) Polplan eines einfachen Systems mit Bewegungsrichtungen der Scheiben. b) Regel für den Ort des Nebenpols zweier durch ein Querkraftgelenk angeschlossener Scheiben.	141
5.15	Konstruktion der Nebenpole aller beteiligten Scheiben.	142
5.16	Kinematik in einem Polplan	143
5.17	Rahmen, bei dem entscheidende Hauptpole im Unendlichen liegen.	144
5.18	Verschiedene Reihenfolgen von Hauptpolen, Nebenpolen und Scheiben.	145
5.19	Greensche Identität und Gleichgewicht: a) Balken auf zwei Stützen, b) 1-Verschiebung, c) 1-Verdrehung, d) Zug-Druckstab mit Streckenlast und e) 1-Verschiebung in horizontaler Richtung.	149
5.20	Hält die Brücke? Eine vorsichtige Belastung mit einem Fuß gibt einen Aufschluss darüber!	152
5.21	Der Raum V , in dem die exakte Lösung enthalten ist, wird durch die FEM auf den Unterraum V_h abgebildet.	153
5.22	Die Biegelinie für das System in a) wurde einmal exakt, d.h. durch Lösen der Differentialgleichung, und einmal über ein Näherungsverfahren, die FEM, berechnet. Der Unterschied ist in b) dargestellt.	155
5.23	a) Scheibe mit Fensteröffnung mit Lastfall Eigengewicht, b) global Adaptiv verfeinertes Netz. Dort, wo Singularitäten auftreten (Fensterecken und Spünge in den Lagerungsbedingungen), wird das Netz verfeinert.	156
5.24	Farbig dargestellte Fehlerindikatoren für die einzelnen Elemente für a) das Ausgangsnetz und b) das adaptiv verfeinerte Netz.	157
5.25	Mit einem lokalen, oder auch zielorientiert genannten, Fehlerschätzer adaptiv verfeinertes Netz. Im Bereich der Zielgröße wird das Netz stark verdichtet.	158
5.26	Temperaturverteilung in einem Raum.	159
5.27	Schematische Darstellung der Grundlösung der Absenkung unter dem Punkt i sowie die sich ergebenden Randwerte für die dargestellte Platte.	160
5.28	Ermittlung der Greenschen Funktion für ein System unter Einzellast P und Streckenlast q .	162

5.29	Grundlösungen für den Balken: a) Absenkung, b) Verdrehung, c) Biegemoment und d) Querkraft.	166
6.1	Oberfläche des Programms RSTAB	170
6.2	Programm TwoDFrame	172

Literaturverzeichnis

1. Barthold, F.-J., Stein, E., Elastizitätstheorie, in Mehlhorn, G. (Hrsg.): Der Ingenieurbau, Bd. Werkstoffe Elastizitätstheorie, Ernst&Sohn, Berlin, 1996, S. 165-425.
2. Chapman, B., Fernando, A., Kelly, H., Tran, P., The Engineering Mechanics Interactive Lecture Series: Oligomedia Resources for Computer-Based Learning, Global Journal of Engineering Education, Vol 2, No. 3, pp. 255, UNESCO International Centre of Engineering Education, Monash University, Melbourne, Australia, 1998.
3. Chen, Z.S., H.A.Mang, Über ein Randelementeverfahren zur dreidimensionalen Berechnung des abgesenkten Grundwasserspiegels und der stationären Luftströmung in heterogenem, anisotropem Boden beim Tunnelvortrieb unter Druckluft, Bauingenieur, Vol.65, 1990.
4. Deutsches Institut für Normung e.V., Einwirkungen auf Tragwerke DIN 1055 Teil 1: Wichten und Flächenlasten von Baustoffen, Bauteilen und Lagerstoffen, Beuth Verlag, Berlin, 2002.
5. Deutsches Institut für Normung e.V., Einwirkungen auf Tragwerke DIN 1055 Teil 3: Eigen- und Nutzlasten von Hochbauten, Beuth Verlag, Berlin, 2006.
6. Deutsches Institut für Normung e.V., Einwirkungen auf Tragwerke DIN 1055 Teil 4: Windlasten, Beuth Verlag, Berlin, 2005.
7. Deutsches Institut für Normung e.V., Einwirkungen auf Tragwerke DIN 1055 Teil 5: Schnee- und Eislasten, Beuth Verlag, Berlin, 2005.
8. Deutsches Institut für Normung e.V., Einwirkungen auf Tragwerke DIN 1055 Teil 9: Außergewöhnliche Einwirkungen, Beuth Verlag, Berlin, 2003.
9. Deutsches Institut für Normung e.V., Einwirkungen auf Tragwerke DIN 1055 Teil 100: Grundlagen der Tragwerksplanung, Sicherheitskonzept und Bemessungsregeln, Beuth Verlag, Berlin, 2001.
10. Franke, W., Optimierung des Lehrbetriebs am Beispiel des FG Baustatik, Diplom-2-Arbeit, Fachgebiet Baustatik (Bauingenieurwesen) der Universität Kassel, 2004.
11. Franke, W., Vereinfachungsstrategien für die Modellierung mit Finiten Elementen, Projekt-3-Arbeit, Fachgebiet Leichtbau (Bauingenieurwesen) der Universität Kassel, 2003.
12. Grätsch, T., L_2 -Statik, Dissertation, Fachgebiet Baustatik der Universität Kassel, 2002.

13. Hall, W. S., Oliveto, G., Boundary Element Methods for Soil-Structure-Interaction, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
14. Harbord, R., Statik der Baukonstruktionen II, Statisch unbestimmte Stabtragwerke, TU Berlin, Berlin 2001, www.statik.tu-berlin.de
15. Hartmann, F., Methode der Randelemente, Springer, Berlin, 1987.
16. Hartmann, F., Katz, C., Statik mit Finiten Elementen, Springer, Berlin, 2002
17. Kempfert, H.-G., et al., Band 1: Einführung in die Geotechnik, Universität Kassel, 2003
18. Kempfert, H.-G., et al., Band 3: Grundbau 2, Universität Kassel, 2003
19. Lang, H. J., Huder, J. and Amman, P., Bodenmechanik und Grundbau, Springer, Berlin, 7. Auflage, 2002
20. Link, M., Finite Elemente in der Statik und Dynamik, Teubner, Wiesbaden, 2002
21. Merziger, G., Wirth, T., Repititorium der höheren Mathematik, 5. Auflage, Binomi Verlag, Springer, 2006.
22. Petersen, C., Stahlbau: Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten, 3. Aufl., Vieweg Verlag, Wiesbaden, 1993.
23. Rubin, H., Schneider, K.-J., Baustatik - Theorie I. und II. Ordnung, Werner-Verlag, Düsseldorf, 4. Auflage, 2002
24. Schard, R., Schardt, C., Verallgemeinerte Technische Biegetheorie, Lineare Probleme. Springer, Berlin, 1998.
25. Schneider, K.-J., et al., Bautabellen für Ingenieure, Werner Verlag, 17. Auflage, Düsseldorf, 2006.
26. Stolzenberg, B., EDV-Orientierte Mathematische Methoden I, Vorlesungsskript, Kassel, 1999.
27. Wasser- und Schifffahrtsdirektion Mitte Hannover, Stadtlandschaften und Brücken in Hannover, Schlütersche, Hannover, 2000.
28. Wunderlich, W., Kiener, G., Statik der Stabtragwerke, Teubner Verlag, Wiesbaden, 2004.
29. Zywno, M.S., Brimley, W.J.G., White, W.E., Effective Integration of Multimedia Courseware in Engineering Education at Ryerson Polytechnic University, Global Journal of Engineering Education, Vol 4, No. 1, pp. 25, UNESCO International Centre of Engineering Education, Monash University, Melbourne, Australia, 2000.

Sachverzeichnis

- L_2 -Skalarprodukt 154
- f -Vektor 63, 65
- Überlagerungszahlen 51
- Übertragungsfunktion 161
- Übertragungsmatrix 162
- 1-Kraft 44, 133
- 1-Last 38, 48, 97, 163
- 1-Verdrehung 133
- 1-Verschiebung 142, 149

- Absenkung 37, 47, 105, 133, 143
- Abzählkriterium 30, 54
- Ansatzfunktionen 114, 153
- Antimetrie 91
- Antragsrichtung 53
- Arbeit 123
- Arbeitsbilanzierung 144
- Arbeitsgleichung 34, 36, 97, 132
- Arbeitsprinzip 125
- Arbeitssatz 46, 150
- Arbeitsterme 36, 43
- Aufenthaltsbereiche 20
- Auflager 12, 30, 32, 111
- Auflagerkraft 13, 95
- Auflagerreaktion 30, 94, 133
- Außenfeld 26
- Außenwinddruck 21

- Böengeschwindigkeitsdruck 21
- Balkenabschnitt 5
- Balkenelement 6, 71, 90, 136
- Balkenfreiheitsgrade 118
- Balkensteifigkeitsmatrix 80, 116
- Balkentheorie 89

- Bauelement 34
- Baustatik 34
- Beanspruchung 17, 103
- Behälter 43
- Belastung 7, 16, 25, 40, 44, 65, 129
- Belastungsfunktion 9, 65
- Belastungskombination 26
- Belastungsrichtung 26
- Belastungssteigerung 109
- Bemessungseinwirkung 19
- Bemessungskonzept 25
- Bemessungsregel 17
- Bemessungssituation 17
- Bemessungswert 17
- Berechnungsmethode 91
- Bernoulli-Balken 98
- Bestimmungsgleichung 29, 87
- Betti 34, 36, 61, 146
- Bettungshalbraum 100
- Bettungsmodul 102
- Bettungsziffer 102
- Bettungszifferverfahren 102
- Bezugsfaser 10
- Biegebalken 9, 71, 80, 125
- Biegelinie 9, 46, 131, 151, 166, 172
- Biegelinien 44
- Biegelinienberechnung 146
- Biegemoment 10, 36, 53, 106
- Biegemomentengelenk 141
- biegesteif 14, 99
- Biegesteifigkeit 103
- Biegung 6, 38
- Bilanzierung 49

- Bilinearform 154
- Bogen 98
- Boundary Elements 129, 158

- Dach 21
- Dachflächen 21
- Dachkonstruktion 21
- Dachneigung 22
- Dachterrassen 20
- Dehnstab 8
- Dehnsteifigkeit 71
- Dehnung 7, 97, 108
- Differentialgleichung 6, 9, 103, 115
- Drehfeder 38
- Drehfreiheitsgrad 86
- Drehwinkelverfahren 85
- Dreifeldbrücke 136
- Dreigelenkrahmen 32
- DWV 85

- EDV-Einsatz 169
- Eigenform 118
- Eigengewicht 20, 25, 156
- Eigenlast 20
- Eigenwertproblem 118
- Einfeldträger 10, 47
- Einflussfläche 166
- Einflussfunktion 77, 129, 159
- Einflussfunktion T.2.O. 116
- Einflusslinie 48, 129, 139
- Einheits-Kraftgröße 56
- Einheits-Weggröße 89
- Einheitskräfte 56
- Einheitsvektor 81
- Einheitsverformung 60, 65, 77, 116, 136, 153
- Einheitsverschiebung 89
- Eins-Kraft 52
- Eins-Last 53
- Einspannmoment 47, 66
- Einspannung 11
- Einsverformung 79, 82
- Einwirkung 17, 34, 65
- Einwirkungskombination 17
- Einzellast 9, 37, 66, 93
- Einzelmoment 9
- Einzelpunktverformung 45
- Einzelpunktverschiebung 44
- Eislast 22

- elastisch 83, 140
- elastisch-elastisch 108
- elastisch-plastisch 108
- Elastizitätsgleichung 36, 52
- Elastizitätsmodul 7, 71
- Element 7, 59, 70, 102
- Elementfehler 157
- Elementgröße 156
- Elementsteifigkeitsmatrix 70
- Endmomentenverlauf 51
- Energie 56, 89, 123
- Energiebilanzierung 56, 89
- Energieerhaltung 123
- Energieerscheinungsformen 123
- Energieniveau 124
- Entlastung 19, 108, 124
- Erdbeben 18, 103
- Erddruck 18
- Ersatzfeder 83
- Ersatzkraft 131
- Ersatzsystem 92
- Erwärmung 43
- Eulerfälle 114
- Explosionszeichnung 11

- FE-Lösung 154
- FE-Lastfall 156
- FE-Methode 155
- FE-Modell 166
- FE-Netz 157
- FE-Programm 166
- Feder 38, 59
- Federgesetz 38, 59, 127
- Federkonstante 38
- Federlement 38
- Federsteifigkeit 71
- Federterm 39
- Federverformung 38
- Federwirkung 38
- Fehler (FE) 155
- Fehlerberechnung 155
- Fehlerindikator 156
- Fehlerlasten 156
- Feldbelastung 65
- FEM 151
- Festhaltekräfte, negative 65
- Festhaltekraft 65
- Festigkeit 18
- finite Elemente Methode 59, 129, 151

- Firstkante 23
- Flächenlast 20
- Flächentragwerk 154, 170
- Fließgelenk 107
- Fließgelenktheorie 107
- Fließgrenze 107
- Fließmoment 109
- Formänderungsintegral 52
- Formbeiwert 23
- Freiheitsgrad 59, 91, 118, 159
- Freischneiden 31, 133
- Fundament 17, 101

- Galerkinverfahren 154
- Gauß-Algorithmus 77
- Gauß-Punkt 74
- Gebiet 156, 159
- Gebrauchstauglichkeit 18, 44, 108
- Gelenk 29
- Gelenkanzahl 54
- Gelenkarten 12, 16, 30
- Gelenklager 141
- Gesamtarbeit 125, 144
- Gesamtenergie 128
- Gesamtfehler 157
- Gesamtsteifigkeitsmatrix (GSM) 63, 87
- Gesamtsystem 12, 81, 95
- Gesamtverdrehung 132
- Gesamtverformung 48, 125
- Gesamtverschiebung 46
- Geschwindigkeitsdruck 21
- Getriebe 141
- Gleichgewicht 6, 13, 29, 61, 94, 128
- Gleichgewichtsbedingungen 29, 40
- Gleichungslöser 94
- Gleichungssystem 50, 77, 94, 118, 153
- Green 146
- Greensche Funktion 135, 157
- Greensche Identität 115, 146
- Grundlösung 160

- Hauptpol 140, 144
- Hermite-Polynome 77, 80, 136
- Hilfsfunktion 52
- Hilfskraft 34
- Hilfssystem 96
- Hilfszustand 34, 92

- Indexschreibweise 51
- Inzidenztabelle 63, 77, 87

- Kinematik 141
- Kirchhoffplatte 165
- Knickfigur 89, 114, 118
- Knicklänge 112
- Knicklast 118
- Knoten 13, 30, 65, 86, 153
- Knotenanzahl 54
- Knotenkräfte 74, 137
- Knotenverdrehung 88
- Knotenverformung 153
- Kondensationsmatrix 84
- Koordinatenachsen 5
- Koordinatenrichtung 6
- Koordinatensystem 5, 53, 71
- Koppelbedingung 161
- Kraft-Verformungsbeziehung 111
- Kraftfluss 79
- Kraftgröße 5
- Kraftgrößenverfahren 29, 91
- Kraftvektor 62, 77
- Kragarm 10, 26

- Lageenergie 124
- Lagerabsenkung 47
- Lageranzahl 54
- Lagerdrücke 65
- Lagerreaktion 11, 25, 29, 31, 49, 54, 67, 94, 125
- Lagerverschiebung 33
- Lagerverschiebung, eingepreßt 47
- Langersche Balken 98
- Laplace-Operator 165
- Last-Verformungs-Diagramm 112
- Lastangriffspunkt 106, 131, 139
- Lastannahmen 16
- Lastfall 26
- Lastfall Lagerverschiebung 47
- Lastfall Temperatur 32, 42
- Lastfallkombinationen 170
- Lastspannungszustand 34, 47
- Lastvektor 65, 77, 87, 129, 137
- Lastzustand 38, 43, 49, 97, 148
- linear elastisch 25
- Longitudinalkraft 115

- Matratzenmodell 100
- Matrizenschreibweise 60, 87

- Matrizenverschiebungsmethode 59, 74
Mehrfachgelenke 31
Mehrfeldbrücke 136
Mohr 146
Mohrsche Analogie 151
Momentenflächen 10
Momentengleichgewicht 6, 53, 86, 149
MVM 59, 66, 76, 137
- Näherungslösung 83, 153
Näherungsverfahren 151, 158
Nachlaufrechnung 74
Nebenbedingung 162
Nebenbedingungen 12, 30
Nebenpol 140, 144
Netz 156
Netzanpassung 157
Netzverfeinerung, adaptive 156
nichtlinear 89, 105
Nonbananas 105
Normalkraft 6, 36, 72, 115, 135
Normalkraft, kritische 119
Normalkraftgelenk 12, 31
Normalkraftstab 125, 161
Normalkraftverformung 7
Normierungsfaktor 138
Nutzlast 20
- Operator 165
Originallastfall 156
Orthogonalität 49
- p-Vektor 65, 68
P.d.v.K. 126, 148
P.d.v.V. 125
Passproblem 96
Pendelstab 13, 70
plastisch-plastisch 107
Platte 154
Polplan 140
Polplankonstruktion 133, 140
Positivdefinition 5, 161
Positivrichtung 75
Projektion 53, 143
- Querbelastung 103
Querkraft 9, 36, 133
Querkraftgelenk 12, 31, 133, 141
Querlast 115
- Rahmen 30, 54, 94
Rahmenecke 38, 135
Rahmentragwerk 46, 86, 94
Randbedingungen 9, 40, 89, 151, 161
Randelemente 158
Randelementemethode, REM 158
Randwertbestimmung 165
Raumtragwerke 53
Reduktionssatz 52
Relativverdrehung 44, 133
Relativverschiebung 133, 143
REM 129, 158
Ringanker, Ringbalken 25
Rotationsfeder 38, 171
- Scheibe 140, 154
Schneelast 22
Schneelastzone 22
Schnittgrößen 5, 25, 56
Schnittkraftverlauf 11, 32, 166
Schnittprinzip 9, 11, 29, 53
Schnittufer 5
Schnittuferdefinition 6
Schub 38
Schubspannung 102
Schubträger 102
Seil 3, 103, 116
Seildifferentialgleichung 115
Seilkrümmung 105
Seilkraft 104
Seilsteifigkeit 105
Setzungsmulde 100
Sicherheitskonzept 17
Skalarprodukt 50, 62
Skalierungsfaktor 48, 143
Spannungs-Dehnungs-Beziehung 108
Spannungszustand 49
Stütze 97, 135
Stützmoment 26
Stab 8, 42, 60, 137, 161
Stabbogen 98
Stabelement 63
Stabilitätsproblem 112
Stabkennzahl 117
Stabsteifigkeitsmatrix 79
Starrkörperbewegung 47, 62, 149
statisch bestimmt 32
statisch unbestimmt 32
statische Unbestimmtheit 29, 54

- Steifezifferverfahren 100
- Steifigkeitsmatrix 61, 71
- Stockwerksrahmen 53, 104
- Streckenlast 9, 40, 105
- Streifenfundament 98
- Substruktursteifigkeitsmatrix 84
- Substrukturtechnik 82
- Superposition 49
- Superpositionsprinzip 25, 140
- Symmetrie 61, 91, 110

- Teilsicherheitsbeiwert 17
- Teilsystem 12, 29, 92
- Temperatur 159
- Temperaturlast 43
- Testfunktion 148, 152
- Testkraft 47
- Timoschenkobalken 102
- Torsionssteifigkeit 55
- Traglast 109
- Traglastverfahren 107

- Transformationsmatrix 70, 85
- Translationsfeder 171

- u-Vektor 76

- Verdrehung 8, 86, 103
- Verformungsbedingung 29, 49
- Verformungsfigur 44, 81
- Versagensreihenfolge 109
- Vierendeelträger 99
- Vorzeichendefinition 5, 53, 75

- Wanderlast 129, 135
- Weggrößenverfahren 59
- Werkstoff 106
- Wind 17, 22
- Windlast 17, 21
- Windzonen 21

- Zusatzspannungen 42, 47
- Zwangskräfte 42, 47